PREPARAZIONE ALLA PRIMA PROVA IN ITINERE

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente e sinteticamente, altrimenti non verranno prese in considerazione.

ESERCIZIO 1 (4 punti) Sia X uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$ uno sottoinsieme di X munito della topologia di sottospazio. Dimostrare che se X è uno spazio regolare (cioè T_1 e T_3), allora anche A è uno spazio regolare.

ESERCIZIO 2 (6 punti) Siano X_α spazi topologici, con α che varia in un insieme di indici I, e sia $X := \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ munito della topologia di prodotto. Dimostrare che:

(i) (3 punti) Se X_α è di Hausdorff (cioè T_2) per ogni $\alpha \in I$ allora X è di Hausdorff;
(ii) (3 punti) Se X è di Hausdorff allora X_α è di Hausdorff per ogni $\alpha \in I$.

ESERCIZIO 3 (8 punti) Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ l'unione delle rette $\{y = 0\}$ e $\{y = 1\}$ in $\mathbb{R}^2$ (con coordinate x e y) munito della topologia di sottospazio. Sia $\sim$ la relazione d'equivalenza su X tale che $(x, 1) \sim (x, 0)$ per ogni $x \neq 0$. Sia $Y := X/\sim$ munito della topologia quoziente e sia $p : X \twoheadrightarrow Y$ la mappa di proiezione al quoziente. Dimostrare che:

(i) (4 punti) p è una mappa aperta ma non chiusa;
(ii) (4 punti) Y è T_1 ma non è uno spazio di Hausdorff (cioè T_2).

ESERCIZIO 4 (12 punti) Sia Z la retta reale munita della topologia avente per base gli insiemi della forma $S_a := (a, +\infty)$ al variare di $a \in \mathbb{R}$. Dimostrare che:

(i) (4 punti) Z è T_0 e T_4 ma non è né T_1 né T_2 né T_3.
(ii) (4 punti) Z è II numerabile, I numerabile, separabile e Lindelòf.
(iii) (4 punti) Z non è né numerabilmente compatto né compatto per successioni né compatto.

ESERCIZIO 5 (6 punti) Dimostrare che uno spazio metrico (X, d) totalmente limitato è separabile.