Tutorato di GE220- Soluzione-

AA. 2011-2012
Docente: Prof. Filippo Viviani
Tutore: Martina Patone

22 Febbraio 2012

1. Dimostrare che ognuno delle seguenti é una distanza di $\mathbb{R}^n$:

   (a) $d_1(x,y) = \|x-y\|$

   (b) $d_2(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$;

   (c) $d_3(x,y) = \max_i\{|x_i - y_i|\}$.

   Dimostrare inoltre che queste distanze sono topologicamente equivalenti.

   SOL: Inanzitutto dobbiamo dimostrare le proprietà della metrica.

   (a) i. $d_1(x,y) = \|x-y\| \geq 0$ (proprietá della norma) e $d_1(x,y) = \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$;

   ii. $d_1(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |-1|\|y-x\| = \|y-x\| = d_1(y,x)$

   iii. $d_1(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| = d_1(x,z) + d_1(z,y)$

   (b) i. $d_2(x,y) = \sum_{i=0}^n |x_i - y_i| \geq 0$ e $d_2(x,y) = \sum_{i=0}^n |x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n |x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i \Leftrightarrow x = y$

   ii. $d_2(x,y) = \sum_{i=0}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=0}^n (-1)|y_i - x_i| = \sum_{i=0}^n |-1||y_i - x_i| = \sum_{i=0}^n |y_i - x_i| = d_2(y,x)$

   iii. $d_2(x,y) = \sum_{i=0}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=0}^n |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq \sum_{i=0}^n |x_i - z_i| + \sum_{i=0}^n |z_i - y_i| = d_2(x,z) + d_2(z,y)$

   (c) i. $d_3(x,y) = \max_i\{|x_i - y_i|\} \geq 0$ e $d_3(x,y) = \max_i\{|x_i - y_i|\} = 0 \Leftrightarrow \{|x_i - y_i|\} = 0 \Leftrightarrow x = y$

   ii. $d_3(x,y) = \max_i\{|x_i - y_i|\} = \max_i\{|y_i - x_i|\} = d_3(y-x) \Leftrightarrow |x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ (vero per le proprietá del valore assoluto)

   iii. $d_3(x,y) = \max_i\{|x_i - y_i|\} = \max_i\{|x_i - z_i + z_i - y_i|\} \leq \max_i\{|x_i - z_i| + |z_i - y_i|\} \leq \max_i\{|x_i - z_i| + \max_i\{|z_i - y_i|\}$

   Per dimostrare che le tre metriche sono topologicamente equivalenti basta far vedere che sono equivalenti. Devo dunque far vedere che vale la seguente uguaglianza:

$$d_3(x,y) \leq d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq n d_3(x,y)$$

   Questo dimostrerá che d_1 e d_2 sono equivalenti a d_3. In modo analogo si dimostra che d_1 e d_2 sono equivalenti a d_3.

$d_3(x,y) = \max_i\{|x-y|\} = \sqrt{\max_i |x_i - y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=0}^n |x_i - y_i|^2} = d_1(x,y) \leq$ [1] $\sum_{i=0}^n |x_i - y_i| = d_2(x,y) \leq n \max_i |x_i - y_i| = n d_3(x,y)$

2. Se (X,d) é spazio metrico si mostri che anche

$$d' = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

é una metrica in X ed inoltre che tale metrica é topologicamente equivalente a d, cioé entrambe inducono la stessa topologia su X.

SOL:

(a) $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \geq 0$ in quanto $d(x,y) \geq 0$ e $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(b) $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = d'(y,x)$

(c) Per dimostrare che $d'(x,y) \leq d'(x,z) + d'(z,y)$, cioè che $\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}$ Faccio vedere che $\frac{c}{1+c} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$ sapendo che $a + b \geq c$.
Equivalentemente che $1 - \frac{1}{1+a} + 1 - \frac{1}{1+b} \geq 1 - \frac{1}{1+c}$.
Siano $a' = 1 + a$, $b' = 1 + b$ e $c' = 1 + c$, allora ottengo $1 - \frac{1}{a'} + 1 - \frac{1}{b'} - 1 + \frac{1}{c'} \geq 0$. Sapendo che $a' + b' - 1 \geq c'$, con $a', b', c' \geq 1$.
Allora $1 + \frac{1}{c'} \geq \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'}$. Sostituendo otteniamo $1 + \frac{1}{a'+b'-1} \geq \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'}$.
Cioé $\frac{a'+b'}{a'+b'-1} \geq \frac{a'+b'}{a'b'}$ che é vera $\Leftrightarrow a' + b' - 1 \leq a'b'$. Lúltima disegueglianza é peró sempre vera, in quanto, dividendo per a' otteniamo: $\frac{a'+b'-1}{a'} \leq b'$ cioé $1 + \frac{b'-1}{a'} \leq b'$ e ancora $\frac{b'-1}{a'} \leq b' - 1$ che è vero con $a' > 1$.

Per dimostrare che $d(x,y)$ e $d'(x,y)$ sono topologicamente equivalenti faccio vedere che vale la seguente uguaglianza:

$$\frac{\bar{d}(x,y)}{2} \leq d'(x,y) \leq d(x,y)$$

dove $\bar{d}(x,y)$ é la limitazione di $\bar{d}$. Cioé $\bar{d}(x,y) = \begin{cases} 1 & d(x,y) \geq 1 \\ d(x,y) & d(x,y) < 1 \end{cases}$

Nella seconda parte della disequazione abbiamo:

$$d'(x,y) \leq d(x,y) \Rightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq d(x,y) \text{é sempre vero}$$

Nella prima parte invece due casi:

(a) Se $d(x,y) \geq 1 \Rightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \geq \frac{1}{2}$.

(b) Se $d(x,y) < 1 \Rightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \geq \frac{d(x,y)}{2}$.

Ed entrambi sono sempre verificati.

[1] $(\sqrt{a^2+b^2} \leq a + b)$

3. Per ogni $x \in \mathbb{R}^2$

$$N_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 || y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| < r\}$$

é un quadrato aperto con diagonali parallele agli assi. Dimostrare che la famiglia

$$D_2 = \{N_r(x) | x \in \mathbb{R}^2, r > 0\}$$

é una base della topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$.

SOL: Per dimostrare che D_2 é una base per $\mathbb{R}^2$ faccio vedere che rispetta i seguenti due assiomi delle basi:
Sia X uno spazio topologico e $\mathcal{B}$ un sottoinsieme dell'insieme delle parti di X $\tau = \{\cup_{B_i \in \mathcal{B}} B_i\}_{i \in I}$ é una topologia (e quindi $\mathcal{B}$ é una base) se e solo se:

(a) X é unione di elementi di $\mathcal{B}$. Cioé $\forall x \in X, \exists B_x \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B_x$.

(b) $\forall x \in B_1 \cap B_2, B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \exists B_x \in \mathcal{B}, x \in B_x$ tale che $B_x \subset B_1 \cap B_2$

Ovviamente la prima condizione é sempre verificata. Basta considerare i quadrati con centro ogni punto di $\mathbb{R}^2$.
Anche la seconda condizione si verifica facilmente:
Siano $N_r(x)$ e $N_{r'}(y) \in \mathcal{D}_{\in}$ con $x \in N_r(x), N_{r'}(y)$ e sia $z \in N_r(x) \cap N_{r'}(y)$. Vogliamo fare vedere che esiste un $N_s(z)$ tale che $x \in N_s(z) \subset N_r(x) \cap N_{r'}(y)$. E questo $N_s(z)$ esiste sempre prendendo $s < \frac{d(x,y)}{2}$.

4. Date le seguenti topologie su $\mathbb{R}$:

(a) La topologia euclidea

(b) La topologia cofinita

(c) La topologia che ha come base $(a, b]$ con a,b$\in \mathbb{R}$ (topologia del limite superiore)

(d) La topologia che ha come base $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}, x < a\}$

Determinare per ognuna di queste topologie, quali sono le topologie tra quelle date che la contengono e sono in essa contenute (cioé le piú fini e meno fini).

SOL: Per determinare quando una topologia é piú fine di un'altra possiamo utilizzare la seguente proposizione: Siano τ e τ' due topologie su X. Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ le rispettive basi. Allora:
$\tau \subset \tau'$ se e solo se $\forall x \in X \, \forall B_x \in \mathcal{B}$, $x \in B_x \, \exists B'_x \in \mathcal{B}'$ tale che $x \in B'_x \subset B_x$

Iniziamo a confrontare le topologie: Siano $\mathcal{B}_{eucl}$, $\mathcal{B}_{cof}$, $\mathcal{B}_{lim}$, $\mathcal{B}_{inf}$ le basi rispettivamente delle topologie definite sopra.

(a) Vediamo la topologia euclidea e cofinita: $\exists (a, b) \in \mathcal{B}_{\rceil\sqcap\rfloor\updownarrow}$ tale che $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall (c, d) \setminus \{p_1, \ldots, p_n\} \in \mathcal{B}_{cof}$ che contenga x, valga $x \in (a, b) \subset (c, d) \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$? Questo é vero, infatti $(c, d) \setminus \{p_1, \ldots, p_n\} = (c, p_1) \cup (p_1, p_2) \cup \ldots \cup (p_n, d)$, allora x appartiene ad uno di quegli aperti i quali vengono ovviamente contenuti da qualsiasi aperto (a, b) piú piccolo. Allora $\tau_{cof} \subsetneq \tau_{eucl}$, cioé la topologia euclidea é piú fine.

Ma anche l'inclusione inversa é vera. Infatti $\exists(c, p_1) \cup \ldots \cup (p_n, d)$ tale che $\forall x \in X$ e $\forall(a, b)$ che contengono x,vale che $x \in (c, p_1) \cup \ldots \cup (p_n, d) \subset (a, b)$. Basta infatti che x sia contenuto in uno dei aperti, che é sicuramente contentuto in (a, b).

(b) topologia euclidea e del limite superiore: $\exists(a, b) \in \mathcal{B}_{eucl}$ tale che $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall(c, d] \in \mathcal{B}_{lim}$ che contenga x, valga $x \in (a, b) \subset (c, d]$? Questo non é vero per $x = d$. Allora $\tau_{lim} \nsubseteq \tau_{eucl}$. Ma é vera l'inclusione inversa, allora $\tau_{eucl} \subsetneqq \tau_{lim}$. La topologia del limite superiore é dunque piú fine.

(c) topologia euclidea e dell'infinito: Ovviamente non esiste $(-\infty, d)$ tale che $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall(a, b) \in \mathcal{B}_{eucl}$ che contenga x sia $x \in (-\infty, d) \subset (a, b)$, mentre é sempre vera l'inclusione inversa. Allora $\tau_{inf} \subsetneqq \tau_{eucl}$. La topologia euclidea é la piú fine.

Similmente si vede che:

(d) $\tau_{cof} \subsetneqq \tau_{lim}$;

(e) $\tau_{inf} \subsetneqq \tau_{cof}$;

(f) $\tau_{inf} \subsetneqq \tau_{lim}$.

5. Trovare tutte le topologie su un insieme $X = \{a, b, c\}$ costituito da tre elementi.

SOL: Si contano 29 topologie nellínsieme $X = \{a, b, c\}$, che sono:

- $\{\emptyset, \{a, b, c\}\}$
- $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b, c\}\}$
- $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}\}$
- $\{\emptyset, \{c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\{\emptyset, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$
- $\{\emptyset, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\{\emptyset, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$
- $\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$
- $\{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$
- $\{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$
- $\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

- $\{\emptyset, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$
- $\{\emptyset, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$
- $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$
- $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$
- $\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$
- $\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$
- $\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$
- $\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$
- $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$

6. Dimostrare che se X é uno spazio topologico che contiene un numero finito di punti ognuno dei quali é chiuso allora X é discreto.

   SOL: Sia $X = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ un insieme finito con $\{p_1\}$ chiuso. Posso allora costruire una topologia dei chiusi, τ, partendo dai punti.

   $\bigcup p_i$ (finita) $\in \tau$ per gli assiomi della topologia.
   Allora $\{p_1, p_2\} = \{p_1\} \cup \{p_2\} \in \tau$;
   $\{p_2\} \cup \{p_3\} = \{p_2, p_3\} \in \tau$;
   $\{p_1\} \cup \{p_2\} \cup \{p_3\} = \{p_1, p_2, p_3\} \in \tau$;
   $\{p_2\} \cup \{p_3\} \cup \{p_4\} = \{p_2, p_3, p_4\} \in \tau$;
   ...
   fino a $X = \{p_1\} \cup \{p_2\} \cup \dots \cup \{p_n\}$ (X ha finiti elementi) $\in \tau$.

   Inoltre: $\bigcap_{i=0}^{n} \{p_1, \dots, p_i\} \in \tau$ Quindi $p_i \cap p_j = \emptyset \in \tau$ con $j \neq i$.

   E quindi ho trovato una topologia τ che é uguale all'insieme delle parti, cioé la topologia discreta, in quanto ogni sottoinsieme di X fa parte di τ.

7. Sia X un insieme che contiene infiniti elementi con la topologia cofinita. Si dimostri che X non é metrizzabile.

   SOL: Sia τ la topologia cofinita su X, cioé:

   $$\tau = \{\emptyset, X, \{U = X \backslash \{p_1, \dots, p_n\}\}$$

   dove $\{p_1, \dots, p_n\}$ é un insieme finito di punti.

   Uno spazio si dice di *Hausdorff se vale le seguente proprietá:*

   $$\forall x, y \in X, x \neq y, \exists U_x, U_y \textit{ intorni aperti, tali che} U_x \cap U_y = \emptyset$$

   Si dimostra che questa proprietá vale per ogni spazio metrico. Quindi se uno spazio é metrizzabile allora é di Hausdorff.

   Ma siano $U_1 = X \backslash \{p_1, \dots, p_n\}$ *e* $U_2 = X \backslash \{q_1, \dots, q_m\}$ *la loro intersezione non é mai vuota, infatti:*

   $$X \backslash \{p_1, \dots, p_n\} \cap X \backslash \{q_1, \dots, q_m\} = X \backslash \{p_1, \dots, p_n, q_1 \dots, q_m\} \neq \emptyset$$

   in quanto X *contiene infiniti elementi.*

8. *Si consideri lo spazio topologico* $S = ([0,1) \backslash \{\frac{1}{2}\}) \cup 3$ *con la topologia indotta dalla topologia euclidea di* $\mathbb{R}$. *Si trovino in* S:

(a) *un sottospazio aperto e chiuso;*

(b) *un sottospazio aperto ma non chiuso;*

(c) *un sottospazio chiuso ma non aperto;*

(d) *un sottospazio né aperto né chiuso.*

Si calcoli l'interno e la chiusura di S *e i suoi punti di accumulazione.*

SOL:

(a) *sottospazio aperto e chiuso* $\{3\} = S \cap (2,4)$ *ma anche* $S \cap [2,4]$*;*

(b) *sottospazio aperto ma non chiuso* $[0, \frac{1}{4}) = S \cap (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ *quindi é aperto. Ma non é chiuso infatti* $[0, \frac{1}{4}) \neq \overline{[0, \frac{1}{4})}$ $(\frac{1}{4} \in \overline{[0, \frac{1}{4})})$*;*

(c) *sottospazio aperto ma non chiuso* $[0, \frac{1}{4}] = S \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$ *quindi é chiuso. Ma non é aperto perché esiste per* $\frac{1}{4}$ *non esiste una palla aperta* $B_r(\frac{1}{4}) \subsetneq [0, \frac{1}{4}]$*;*

(d) *sottospazio né aperto né chiuso* $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$. *Non é chiuso perché* $\frac{1}{3} \in \overline{[\frac{1}{4}, \frac{1}{3})}$, *non é aperto perché* $B_r(\frac{1}{4}) \subsetneq [0, \frac{1}{4}]$.

$\overline{S} = [0,1] \cup \{3\};\ Int(S) = (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1);\ D(S) = [0,1].$