Tuturato di GE220

AA. 2011-2012
Docente: Prof. Filippo Viviani
Tutore: Martina Patone

27 Febbraio 2012

1. Dimostrare che nella topologia euclidea gli intervalli $[a, b]$ sono chiusi.

   SOL: $[a, b]^C = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ che é unione di due aperti nella topologia euclidea, ma allora é aperto, $\Rightarrow [a, b]$ é chiuso.

2. Sia $X = \{a, b, c, d, e\}$ con la topologia
   $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$.
   Trovare la chiusura, il derivato, la frontiera e línterno dei seguenti sottoinsiemi dei seguenti sottoinsiemi:

   $$\{a\}, \{e\}, \{d, e\}, \{a, c\}, \{a, d, e\}.$$

   SOL: Nella topologia τ i chiusi di X sono:
   $\{\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{c, d, e\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{e\}\}$. Ora troviamo la chiusura di ognuno dei sottoinsiemi di X, tenendo conto del fatto che la chiusura é il piú piccolo chiuso di X contenente τ. Dunque:

   - $\overline{\{a\}} = X$;
   - $\overline{\{e\}} = \{e\}$;
   - $\overline{\{d, e\}} = \{c, d, e\}$;
   - $\overline{\{a, c\}} = X$;
   - $\overline{\{a, d, e\}} = X$.

   Per calcolare il derivato possiamo usare la seguente: $\bar{A} = D(A) \cup A$, da cui $D(A) = \bar{A} \setminus A$:

   - $D(\{a\}) = \{b, c, d, e\}$;
   - $D(\{e\}) = \emptyset$;
   - $D(\{d, e\}) = \{c\}$;
   - $D(\{a, c\}) = \{b, d, e\}$;

- $D(\{a,d,e\}) = \{b,c\}$.

L'interno di ogni sottoinsieme si definisce il piú grande aperto di X che é contenuto nel sottoinsieme:

- $Int(\{a\}) = \{a\}$;
- $Int(\{e\}) = \emptyset$;
- $Int(\{d,e\}) = \emptyset$;
- $Int(\{a,c\}) = \{a\}$;
- $Int(\{a,d,e\}) = \{a\}$.

In ultimo per calcolare la frontiera, si puó usare: $Fr(A) = \bar{A} \setminus Int(A)$:

- $Fr(\{a\}) = \{b,c,d,e\}$;
- $Fr(\{e\}) = \{e\}$;
- $Fr(\{d,e\}) = \{c,d,e\}$;
- $Fr(\{a,c\}) = \{b,c,d,e\}$;
- $Fr(\{a,d,e\}) = \{b,c,d,e\}$.

3. In $\mathbb{R}$ consideriamo il sottoinsieme

$$S = \{\frac{n}{(n+1)}; n = 0,1,2,\ldots\}$$

Dimostrare che:

(a) $\bar{S} = S \cup \{1\}$ dove $\mathbb{R}$ ha la topologia euclidea;

(b) $\bar{S} = \mathbb{R}$ dove $\mathbb{R}$ ha la topologia cofinita.

SOL:

(a) Il derivato dell'insieme S non é altro che l'elemento $\{1\}$, infatti il $\lim_{n\to\infty} S = 1$.
Dalla prop. $\bar{S} = S \cup D(S)$ si ottiene esattamente $\bar{S} = S \cup \{1\}$.

(b) S é un insieme con un numero infinito di elementi e in $\mathbb{R}$ con la topologia cofinita i chiusi sono gli insieme che hanno un numero finito di elementi. Allora il piú piccolo chiuso che contiene S non puó essere altri che $\mathbb{R}$.

4. Sia

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{N}, \emptyset, \{n, n+1, n+2, \ldots\ ; n \in \mathbb{N}\}\}$$

(a) Dimostrare che $\mathcal{S}$ é una topologia;

(b) Trovare i punti di accumulazione dellínsieme $S = \{3, 7, 51, 107\}$ e determinare $\bar{S}$

(c) Determinare i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ il cui derivato é $\mathbb{N}$

SOL:

(a) Verifichiamo gli assiomi della topologia:

i. $\emptyset, \mathbb{N} \in \mathcal{S}$ per definizione di $\mathcal{S}$;

ii. $\bigcup_{n_i \in \mathbb{N}} \{n_i, n_i + 1, n_i + 2, \ldots\} = \{n_1, n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots,\} \in \mathcal{S}$ con $n_1 = \min\{n_i\}$;

iii. $\bigcap_{n_i \in \mathbb{N}}$ (finita)$\{n_n, n_n + 1, n_n + 2, \ldots\} \in \mathcal{S}$ con $n_n = \max\{n_i\}$.

(b) Un elemento $n \in \mathbb{N}$ é un punto di accumulazione di S se $\forall U_n$ intorno aperto di n, $U_n \setminus \{n\} \cap S \neq \emptyset$. Ora notiamo che gli intorni aperti di $n \in \mathbb{N}$ sono un insieme infinito di punti ordinati generato da un $m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$. Allora ogni intorno di n meno n stesso ha intersezione non vuota con S per $n \neq 107, 108, \ldots$. Per $n = 107$ l'intersezione puó essere vuota, infatti sia $U_{107} = \{107, 108, \ldots\}$, $U_{107} \setminus \{107\} \cap S = \emptyset$. Allora $D(S) = \{1, 2, \ldots, 106\}$. Un elemento $n \in \mathbb{N}$ appartiene alla chiusura di S se $\forall U_n$ intorno aperto di n, $U_n \cap S \neq \emptyset$. Allora $\bar{S} = \{1, 2, \ldots, 107\}$.

(c) Il sottoinsieme di $\mathbb{N}$ che ha derivato $\mathbb{N}$ é $\mathbb{N}$ stesso.

5. Nel piano $\mathbb{R}^2$ si consideri la famiglia

$$\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}^2, \{x^2 + y^2 < r^2; r > 0\}\}$$

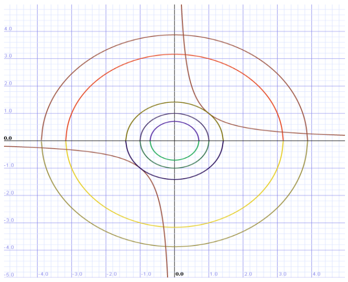
Dimostrare che si tratta di una topologia e determinare la chiusura di $\{xy = 1\}$

SOL: Verifichiamo gli assiomi della topologia:

(a) $\emptyset, \mathbb{R}^2 \in \tau$ per definizione di τ;

(b) L'unione di elementi di τ appartiene ancora a τ. Infatti i casi con $\emptyset$ e $\mathbb{R}^2$ sono banali. Chiamiamo $B_r = \{x^2 + y^2 < r^2; r > 0\}$ i dischi aperti di raggio $r > 0$ e centro l'origine. L'unione di due o piú di questi dischi é ancora un disco di centro l'origine con raggio uguale al raggio maggiore tra i raggi di ogni disco. Cioé $B_{r_1} \cup B_{r_2} \cup \ldots B_{r_n} = B_{\bar{r}}$ dove $\bar{r} = \max\{r_1, \ldots, r_n\}$ che appartiene ancora a τ essendo un disco di centro in 0 e raggio $\bar{r} > 0$

(c) L'intersezione finita di B_r non é altro invece che il disco che ha raggio minimo tra i dischi dati e dunque fa ancora parte della topologia.



Questo prova che τ é una topologia.

Per trovare la chiusura di $A = \{xy = 1\}$ basta osservare il disegno. Nell'immagine vegono rappresentate alcune dei dischi aperti [1] (aperti della topologia τ) e l'iperbole A. Per definizione $\bar{A} = \bigcap C_j$ con C_j chiusi tali che $A \subseteq C_j$ e equivalentemente $\bar{A}$ é il piú piccolo chiuso C contenente A. Nella topologia τ i chiusi (oltre a $\mathbb{R}^2$ e $\emptyset$) sono i complementari di ogni disco aperto B_{r_n}. Quindi dal disegno é evidente che il piú piccolo chiuso contentente A puó essere solo il complementare di B_r con $r \leq \sqrt{2}$. Dunque: $\bar{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \{x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}\}$

[1] nell'immagine ho disegnato circonferenze, ma vanno intese come dischi