Tutorato di GE220

AA. 2011-2012
Docente: Prof. Filippo Viviani
Tutore: Martina Patone

14 Marzo 2012

1. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione da un insieme X in uno spazio topologico Y con topologia τ. Dimostrare che la famiglia di sottoinsiemi di X: $f^*(\tau) = \{f^{-1}(V) | V \in \tau\}$ é una topologia.
   In particolare é la topologia meno fine per la quale f é continua e si chiama *topologia indotta da f su X*.
   Verificare inoltre che se $\mathcal{B}$ é una base per τ, allora $f^*(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}\}$ é una base per $f^*(\tau)$.

   SOL: Verifico i tre assiomi della topologia:

   (a) $\emptyset(= f^{-1}(X)), X(= f^{-1}(Y)) \in f^*(\tau)$;
   (b) Siano $U_1, U_2 \in f^*(\tau)$, allora $U_1 \cap U_2 = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = f^{-1}(V_1 \cap V_2) \in f^*(\tau)$;
   (c) Siamo $U_i \in f^*(\tau)$, allora $\bigcup_i U_i = \bigcup_i f^{-1}(V_i) = f^{-1} \bigcup_i (V_i) \in f^*(\tau)$.

   Ovviamente f é continua per definizione. Notiamo inoltre che togliendo un aperto a $f^*(\tau)$, f non é piú continua. Per dimostrare che $f^*(\mathcal{B})$ é una base per $f^*(\tau)$ basta verificare le seguenti:

   (a) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}(B)$ che é vero perché $f(X) \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$, in quanto $\mathcal{B}$ é una base di τ;
   (b) $\forall f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2),\ f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = \bigcup f^{-1}(B_i)$ che é vero in quanto $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(\bigcup B_i)$ (in quanto base di τ) $= \bigcup f^{-1}(B_i)$.

2. Siano date due topologie τ_1 e τ_2 su un insieme X. Provare che l'applicazione identica $f : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$, $f(x) = x$ é continua se e solo se τ_1 é piú fine di τ_2.

   SOL: Che τ_1 é piú fine di τ_2 equivale a dire che $\forall x \in X, \forall V \in \tau_2$ contenente $f(x)$, esiste un $U \in \tau_1$ contenente x tale che $f(U) \subset V$.
   Se f é continua, allora dato $x \in X$ e $V \in \tau_2$ che contiene $f(x)$, $f^{-1}(V)$ é aperto e contiene x. Dunque $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ dove $f^{-1}(V) = U \in \tau_1$. Allora $\tau_2 \subset \tau_1$.

   Invece sia $V \in \tau_2$, per dimostrare che f é continua basta far vedere che $f^{-1}(V)$ é aperto. Sia $x \in f^{-1}(V)$, $f(x) \in V$. Per ipotesi esiste $U_x \in \tau_1, x \in U_x$ tale che $f(U) \subset V$, cioé $U_x \subset f^{-1}(V)$. Allora $f^{-1}(V)$ é aperto, in quanto $f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$.

3.
- Dare un esempio di funzione aperta ma non continua e di funzione continua ma non aperta.
- Dimostrare che $X \simeq Y \Leftrightarrow \exists f : X \to Y$ tale che:
  - f é biettiva;
  - V é aperto in X se e solo se $f(V)$ é aperto in Y.

SOL:

- Un esempio di funzione aperta ma non continua puó essere

$$f : (\mathbb{R}, \text{top. banale}) \to (\mathbb{R}, \text{top. discreta}), \quad f(x) = x.$$

  Un funzione continua ma non aperta é invece:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$$

  Infatti $f((-1,1)) = [0,1)$ non é aperto.
- Se $X \cong Y$ allora f é biettiva, continua e f^{-1} é continua. Dunque, se f é continua e $f(V)$ é aperto in Y, allora V é aperto in X. Inoltre se f^{-1} continua e V é aperto in X, allora $f(V)$ é aperto in Y.

4. Date due applicazioni $f : X \to X'$ e $g : Y \to Y'$, dimostrare che:

   (a) Se f e g sono continue, allora $F : X \times X' \to Y \times Y', \quad F(x,y) = (f(x), g(y))$ é continua;

   (b) Se f e g sono aperte, allora F é aperta;

   (c) Se f e g sono omeomorfismi, allora F é un omeomorfismo.

   SOL:

   (a) Dati $U' \in X'$ e $V' \in Y'$,$U' \times V'$ appartiene alla base di $X' \times Y'$, allora $F^{-1}(U' \times V') = f^{-1}(U') \times g^{-1}(V')$ é un elemento della base di $X \times Y$, dato che f e g sono continue. Allora F é continua.

   (b) Che F é aperta si dimostra in modo analogo a sopra.

   (c) Se f e g sono omeomorfismi allora F é biettiva, inoltre per sopra, F é continua e ha inversa continua, allora é un omeomorfismo.

5. Dimostrare le seguenti:

   (a) Se X é uno spazio di Hausdorff e $Y \subset X$, allora Y é di Hausdorff.

   (b) Se X e Y sono spazi di Hausdorff allora $X \times Y$ é di Hausdorff.

   SOL:

   (a) Siano $x, y \in X$ con $x \neq y$. Allora per ipotesi, $\exists U_x$, intorno di x, e U_y, intorno di y disgiunti. Ma anche $U_x \cap Y$ e $U_y \cap Y$ sono disgiunti.

   (b) Siano (x_1, y_1) e $x_2, y_2 \in X \times Y$ tali che $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$. Supponiamo che $x_1 \neq x_2$ (o $y_1 \neq y_2$). Per ipotesi $\exists U_{x_1}$ aperto in X e un U_{x_2} aperto in Y tali che $U_{x_1} \cap U_{x_2} = \emptyset$. Allora $U_{x_1} \times Y$ e $U_{x_2} \times Y$ sono due aperti rispettivamente di (x_1, y_1) e (x_2, y_2) e disgiunti in $X \times Y$.

6. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua. Sia $G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y\}$ il grafico di f. Dimostrare che $G(f) \cong X$.

   SOL: Si osservi che $id : X \to X$ e $f : X \to Y$ sono continue. Allora per la proprietá universale del prodotto: $\exists h : X \to X \times Y, \quad h(x) = (x, f(x))$ continua. Inoltre $Im(h) = G(f)$, dunque $h : X \to G(f) \subset X \times Y$ é continua, biettiva e anche aperta, in quanto dato U aperto in $X, h(U) = G(f) \cap (U \times Y)$, con $U \times Y$ aperto in $X \times Y$. Allora é un omeomorfismo.

7. Sia $X = \bigcup A_i$ uno spazio topologico, dove gli A_i sono sottoinsiemi di A. Sia $f : X \to Y$ (Y spazio topologico) con $f|_{A_i}$ continua per ognuno degli A_i. Mostrare che:

   (a) Se gli A_i sono chiusi e in numero finito allora f é continua;

   (b) Se gli A_i sono aperti allora f é continua.

   SOL:

   (a) Sia V un chiuso in Y. $f^{-1} \cap (\bigcup_i A_i) = \bigcup_i (f^{-1}(V) \cap A_i) = \bigcup_i f^{-1}|_{A_i}(V)$. Ognuno dei $f^{-1}|_{A_i}(V)$ é chiuso in A_i perché la restrizione é continua. Essendo inoltre gli A_i chiusi in X e finiti anche la loro unione é chiusa in X.

   (b) La dimostrazione é identica alla precedente, con l'unica differenza che l'unione di infiniti aperti é ancora aperta.

8. Dimostrare che l'insieme $\mathcal{B} = \{(a, b), (a, b) \backslash K | a, b \in \mathbb{R}, \ K = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^+\}\}$ é una base per una topologia τ su $\mathbb{R}$. Dimostrare inoltre che la topologia τ su $\mathbb{R}$ é piú fine di quella euclidea e che $(\mathbb{R}, \tau)$ é uno spazio T_2 ma non T_3.

   SOL: $\mathcal{B}$ é una base:

   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \in (a, b)$;

   (b) $\forall (a, b) \backslash K, (c, d) \backslash K \in \mathcal{B}$, allora $(a, b) \backslash K \cap (c, d) \backslash K = (a, b) \cap (c, d) \backslash K \in \mathcal{B}$ e $\forall (a, b) \backslash K, (c, d) \in \mathcal{B}$, $(a, b) \backslash K \cap (c, d) \in \mathcal{B} = (a, b) \cap (c, d) \backslash K \in \mathcal{B}$.

   Ovviamente τ contiene un aperto in piú della topologia euclidea, inoltre non sono uguali perché K é un chiuso di τ, dato che $\bigcup (a, b) \backslash K = \mathbb{R} \backslash K$. Mentre K non é chiuso nella topologia euclidea, infatti $\bar{K} = K \cup \{0\}$.

   (R, τ) non é regolare (T_3), infatti non esistono due intorni di rispettivamente 0 e K che siano disgiunti. Prendiamo per esempio B_1 e $B_2 \in \mathcal{B}$ tali che $0 \in B_1$, $B_2 \cap \subset K$ con $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. Sia $B_1 = (a, b) \backslash K$ e $0 \in B_1$. Allora $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \backslash \subset B_1$ e V un aperto contenente $\{\frac{1}{n}\}$, allora $(\frac{1}{n} - r, \frac{1}{n} + r) \subset V$. Allora, preso $z \in (\frac{1}{n} - r, \frac{1}{n})$, $z \in B_1$ (perché $z \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$) e $z \in B_2$ (perché $(z \in (\frac{1}{n} - r, \frac{1}{n} + r))$. Dunque $(\mathbb{R}, \tau)$ non é regolare.

9. Si consideri su $[0, 1]$ la seguente relazione di equivalenza: $x \sim y$ se e solo se $x = y$ oppure $\{x, y\} \in S$, dove $S = \{0, 1\}$. Si dimostri che $[0, 1] / \sim_S \cong S^1$

   SOL:

10. Si consideri su $\mathbb{R}$ la seguente relazione di equivalenza: $x \sim y$ se e solo se $x = y$ oppure se $|x| = |y| > 1$. Si dimostri che $\mathbb{R}/\sim$ non é uno spazio di Hausdorff.

    SOL: Sia $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ la proiezione al quoziente. Notiamo che $\pi(1) \neq \pi(-1)$, ma 1 e -1 non hanno aperti saturi disgiunti, allora $\mathbb{R}/\sim$ non é di Hausdorff.

11. Sia $f : X \to Y$ una identificazione ed $A \subset X$ un sottoinsieme saturo. Dimostrare che $Int(A)$ e $\bar{A}$ sono saturi.

    SOL: Per ipotesi, l'applicazione f é aperta, quindi $f(Int(A)) \subset Int(f(A))$. Allora $Int(A) \subset f^{-1}(f(Int(A))) \subset A$. Allora $Int(A) = f^{-1}(f(A))$.
    Per dimostrare che $\bar{A}$ é saturo si passa al complementare. Infatti $\bar{A} = X - (Int(X - A))$ e il complementare in X di un sottoinsieme saturo é ancora saturo.