Tutorato di GE220 -Soluzioni-

AA. 2011-2012
Docente: Prof. Filippo Viviani
Tutore: Martina Patone

21 Marzo 2012

1. Dimostare che:

   (a) se uno spazio é T_2, allora ogni punto é chiuso.

   (b) un sottoinsieme compatto A di uno spazio di Hausdorff X é chiuso.

   SOL:

   (a) Ogni spazio T_2 é anche T_1 e uno spazio é T_1 se e solo se ogni punto é chiuso. Infatti supponiamo che X sia T_1. Sia x un punto di X e scegliamo $y \in X - \{x\}$. Esiste allora un aperto U_y contenente y ma non x tale che $\bigcup_{y \in X - \{x\}} U_y = X - \{x\}$, allora $X - \{x\}$ é un'unione di aperti e quindi é aperto. Ció implica che {x} é chiuso.
   Viceversa se $\{x\}$ e $\{y\}$ sono chiusi, $X - \{y\}$ e $X - \{x\}$ sono due aperti, l'uno contenente x ma non y e l'altro y ma non x, quindi X é uno spazio T_1.

   (b) Possiamo supporre che $A \neq \emptyset$ e $A \neq X$, altrimenti A é comunque chiuso e non c'é nulla da dimostrare. Fissato un punto $x \in X$, per ogni $a \in A$ esiste una coppia di aperti disgiunti U_a e V_a tali che $a \in U_a$ e $x \in V_a$; quindi la famiglia $\{V_a \mid a \in A\}$ ricopre A, ed essendo A compatto esisterá un sottoricoprimento finito. Sia esso $\{V_{a_1}, \ldots V_{a_n}\}$. Allora l'insieme $U = U_{a_1} \cap \ldots \cap U_{a_n}$ é un aperto contenente x e disgiunto da ogni V_{a_i} e quindi $U \subseteq X - A$. Abbiamo cosi dimostrato che esiste un aperto contenente x e contenuto in $X - A$, quindi $X - A$ é aperto e A é chiuso.

2. Sia f un'applicazione da uno spazio compatto X in uno spazio di Hausdorff Y. Dimostrare che se f é chiusa.

   f é un omeomorfismo?

   $id : (\mathbb{R}, \text{top discreta}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \text{top euclidea})$ é un omeomorfismo?

   SOL: Sia $V \subset X$ chiuso. Ma un chiuso in un compatto é compatto, allora V é compatto e $f(V)$ é ancora compatto in Y, perché f é continua, ma X é di Hausdorff e allora $f(V)$ é chiuso. Ne segue che f é chiusa.

f é un omeomorfismo se e solo se f é biettiva. Infatti con tali ipotesi, f é biettiva e chiusa, e allora f é anche aperta, perchè sia U aperto, $f(U) = f(X \backslash C) = f(X) \backslash f(C)$ che é aperto perché $f(X) = Y$ (f é biettiva) e $f(C)$ é chiuso (f é chiusa).

$id : (\mathbb{R}$, top discreta$) \longrightarrow (\mathbb{R}$,top euclidea$)$ non é un omeomorfismo. Infatti ($\mathbb{R}$, top discreta) non é compatto (un insieme infinito con la topologia discreta non é mai compatto) e ($\mathbb{R}$,top euclidea) é di Hausdorff. Segue da sopra che id é continua, biettiva ma non un omeomorfismo.

3. Sia $X = \mathbb{R}$ e $A = (0, 1)$. X/A é lo spazio $X/\sim$, dove $x \sim x' \Leftrightarrow x = x'$ o $x, x' \in A$. X/A é di Hausdorff?

   Sotto quali condizioni il quoziente di uno spazio di Hausdorff é ancora di Hausdorff?

   SOL: X/A non é di Hausdorf. Infatti se $g : X \to X/A$ é la proiezione naturale, la controimmagine di un punto $[x_0] \in X/A$, con $x_0 \in A$ é il sottoinsieme A che non é chiuso. Di conseguenza il punto $[x_0]$ non é chiuso in X/A e quindi X/A non é di Hausdorff.
   Sia Y lo spazio quoziente relativo ad una applicazione $f : X \to Y$. Se f é chiusa e se X é compatto e di Hausdorff, allora Y é (compatto) e di Hausdorff.

4. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua. Se $S \subseteq X$ é un sottoinsieme compatto, dimostrare che l'immagine $f(S)$ é compatta.
   S^1 é compatto?

   SOL: Sia $\{U_i \mid j \in J\}$ un ricoprimento aperto di $f(S)$. Allora $\{f^{-1}(U_j) \mid j \in J\}$ é un ricoprimento aperto di S ed essendo S compatto, esisterá un sottoricoprimento finito $U_k \mid k \in K\}$ con K finito. Ma $f(f^{-1}) \subseteq U_k$ quindi $\{U_k \mid k \in K\}$ ricopre $f(S)$ ed é un sottoricoprimento finito di $\{U_j \mid j \in J\}$. Essendo la mappa quoziente continua, lo spazio quoziente di uno spazio compatto é compatto. Quindi, visto che $S^1 \cong [0, 1]/\{0, 1\}$, allora S^1 é compatto.

5. Dimostrare che un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ é compatto se e solo se é chiuso e limitato.

   SOL: ($\Leftarrow$) K é chiuso e limitato.
   Dunque, se K é limitato allora $K \subset (-N, N)^n$. Se K é chiuso allora $K \subset [-N, N]^n$.
   $K \subset (-N, N)^n \subset [-N, N]^n = [-N, N] \times \ldots \times [-N, N]$ che é prodotto di compatti. Allora $[-N, N]^n$ é compatto.
   Quindi K é un chiuso in un compatto. Allora K é un compatto.
   ($\Rightarrow$) K 'e compatto in $\mathbb{R}^n$, che é di Hausdorff, allora K é chiuso. Supponiamo che non sia limitato, allora $K \subset B_n(0), n \in \mathbb{N}$. Ma questo ricomprimento ha un sottoricoprimento finito, perché K é compatto, allora K sarebbe limitato, che contraddice l'ipotesi.

6. Si dimostri che X é uno spazio di Hausdorff se e solo se la diagonale $D = \{(x, x)\} \subset X \times X$ é chiusa.

SOL: Supponiamo che X sia uno spazio di Hausdorff e consideriamo un punto $(x, y) \in (X \times X) - D$. Per definizione di diagonale si ha $x \neq y$ e dunque esistono due aperti U, V di X tali che $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Quindi $(x, y) \in U \times V \subset (X \times X) - D$. Allora $(X \times X) - D$ é aperto e quindi la diagonale é chiusa.
Viceversa se D é chiusa in $X \times X$ e $x \neq y$, allora esistono due aperti $U, V \subset X$ tali che $(x, y) \in U \times V \subset (X \times X) - D$ e quindi $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

7. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dimostri che il grafico della funzione, cioé l'insieme $G(f) = \{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$, é compatto se e solo se f è continua.

   SOL: Osservo che la funzione $g : [0, 1] \to [0, 1] \times \mathbb{R}$ definita da $g(x) = (x, f(x))$ risulta essere continua per la propr. universale del prodotto (infatti, l'identitá é continua e f pure per ipotesi) e risulta $G(f) = Im(g)$; ricordando che l'immagine continua di un compatto é compatta, si ha l'asserto.