Tutorato di GE220 -Soluzioni-

AA. 2011-2012
Docente: Prof. Filippo Viviani
Tutore: Martina Patone

28 Marzo 2012

1. Mostrare con un esempio che in uno spazio topologico generico, data una successione il suo limite non é unico.

   Sia X uno spazio T_2. Dimostrare che ogni successione convergente ha limite unico.

   In uno spazio metrico ogni successione ha limite unico?.

   SOL: Sia X uno spazio topologico con la topologia banale. Ovviamente $\forall x_n$ successione, $\lim_{n\to\infty} x_n = x, \forall x \in X$.

   La proposizione si dimostra per assurdo. Siano $x, x' \in X$ e supponiamo che data una successione $\{x_n\}$, x e x' siano i suoi limiti distinti, cioé $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = x'$ con $x \neq x'$.
   Per ipotesi X é T^2, allora $\exists U$ e U' aperti, con $x \in U$ e $x' \in U'$ tali che $U \cap U' = \emptyset$.
   Ma la successione é convergente, quindi esistono n_U e $n_{U'} \in \mathbb{N}$ tali che $x_n \in U, \forall n > n_U$ e $x_n \in U', \forall n > n_{U'}$.
   Se $n_0 = \max\{n_U, n_{U'}\}$, allora $x_n \in U \cap U' \, \forall n > n_0$ che é assurdo.

   Se X é metrico, allora é anche di Hausdorff, allora per sopra ogni successione convergente ha limite unico.

2. Dimostrare che:

   - Ogni spazio metrico soddisfa il primo assioma di numerabilitá;
   - Ogni spazio metrico separabile é a base numerabile;

   SOL:

   - Basta vedere che, dato X spazio metrico, $\forall x \in X, \{B(x, 2^{-n}),\ n \in \mathbb{N}\}$ é un sistema fondamentale di intorni numerabile.
   - Sia (X, d) uno spazio metrico separabile e scegliamo un sottoinsieme $E \subset X$ denso e numerabile. É sufficiente dimostrare che la famiglia numerabile di palle aperte $\mathcal{B} = \{B(e, 2^{-n}) \mid e \in E, n \in \mathbb{N}\}$ é una base della topologia. Siano U un aperto di X ed $x \in U$; sia inoltre $n \in \mathbb{N}$ un intero tale che $B(x, 2^{1-n}) \subset U$. Poiché E é denso esiste $e \in$

$E \cap B(x, 2^{-n})$; per simmetria il punto x appartiene alla palla $B(e, 2^{-n}$ e per la disuguaglianza triangolare $B(e, 2^{-n} \subset B(x, 2^{1-n}) \subset U$.

3. Si consideri la *retta di Sorgenfrey* definita come $R_S = (\mathbb{R}, \tau)$ con $\tau = \{[a, b[\ | \, a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$.

   - Dimostrare che la topologia τ cosí definita é piú fine della topologia euclidea;
   - R_S é separabile?;
   - R_S é primo-numerabile?;
   - R_S é secondo-numerabile?;
   - R_S é metrizzabile?

   SOL:

   - τ é piú fine, infatti $(a, b) = \bigcup_{c>a}[c, d[$.
   - R_S é separabile, infatti $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ é denso e numerabile.
   - R_S é primo-numerabile, $\forall x \in \mathbb{R}\{[x, x + 2^{-n} \, | \, n \in \mathbb{N}\}$ é un sistema fondamentale di intorni.
   - R_S non é secondo numerabile. Infatti $\forall x \in \mathbb{R}, x \in [x, +\infty[$ allora esiste $U_x \in \mathcal{B}$, base tale che $x \in U_x \subset [x, +\infty[$.
     In particolare, se $x < y$, allora x non appartiene a U_y. Allora $U_x \neq U_y$. Allora $\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{B}, \ x \mapsto U_x$ é iniettiva, allora $\mathcal{B}$ non é numerabile.
   - R_S non é metrizzabile, perché é uno spazio separabile ma non a base numerabile.

4. Dimostrare che $A \subseteq X$, con X metrico e completo, é chiuso se e solo se é completo rispetto alla metrica indotta.

   SOL: Supponiamo che A é chiuso. Ogni successione di Cauchy in A é una successione di Cauchy in X. Allora converge ad un $a \in \bar{A}$. Allora se A é chiuso, A é completo.
   Viceversa, ogni successione di Cauchy a valori in A che converge in $a \in \bar{A}$ é di Cauchy in (A, d), allora se A é completo $a \in A$, allora $A = \bar{A}$.

5. Mostrare con un esempio che la completezza di uno spazio metrico non é invariante topologico. (sugg. Si consideri $\mathbb{R}$ e un suo sottoinsieme aperto)

   SOL: $(\mathbb{R}, d)$, $d(x, y) = |x - y|$ é completo.
   $(]0, 1[, d)$ non é completo.
   Peró $(\mathbb{R}, d) \backsimeq (]0, 1[, d)$.

6. Dimostrare che ogni spazio metrico compatto per successioni X é totalmente limitato.

   SOL: Sia (X, d) uno spazio metrico compatto per successioni e supponiamo per assurdo che esista $r > 0$ tale che non sia possibile ricoprire X con un numero finito di palle aperte di raggio r.
   Costruiamo per ricorrenza una successione $\{a_n\}$, scegliendo $a_1 \in X$ a piacere e, per ogni $n > 1$, scegliendo come a_n un qualsiasi elemento del chiuso non vuoto $X \ \bigcup_{i=1}^{n-1} B(a_1, r)$. Siccome vale $d(a_n, a_m) \geqslant r \ \forall n > m$, ne segue che ogni sottosuccessione di $\{a_n\}$ non puó essere convergente, allora X non é compatto per successioni.

7. Sia $A \subsetneqq X$, X spazio metrico. A é totalmente limitato se e solo se $\bar{A}$ é totalmente limitato.

   SOL: Supponiamo che $\bar{A}$ sia totalmente limitato e sia $r > 0$; esistono quindi $a_1, \ldots, a_n \in \bar{A}$ tali che $\bar{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \frac{r}{2})$.
   Scegliendo $\forall i = 1, \ldots, n$ un punto $b_i \in B(a_i, \frac{r}{2}) \cap A$, dalla disuguaglianza triangolare che $b_i \in B(b_i, r)$, allora $A \subset \bar{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(b_i, r)$.
   Supponiamo adesso che A sia totalmente limitato e sia $r > 0$; esistono quindi $a_1, \ldots a_n \in A$ tali che $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \frac{r}{2})$ e quindi $\bar{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \bar{B}(a_i, \frac{r}{2}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, r)$.