Tutorato di GE220 -Soluzioni-

AA. 2011-2012
Docente: Prof. Filippo Viviani
Tutore: Martina Patone

7 Maggio 2012

1. Sia J un intervallo aperto (limitato o no) di $\mathbb{R}$. Dimostrare che un intervallo J' di $\mathbb{R}$ é omeoemorfo a J se e solo se J é aperto.

   SOL: Se J' é aperto si é giá visto essere omeomorfo a J.
   SE J' é chiuso e limitato allora é compatto, mentre J non lo é quindi non possono essere omeomorfi.
   Se J' é semiaperto, supponiamo $J' = (a, b]$, supponiamo esista un omeomorfismo $f : J' \to J$. Poiché f é biunivoca allora

   $$f(J' \setminus \{b\}) = J \setminus \{f(b)\}$$

   Poiché f é continua e $J' \setminus \{b\}$ é connesso, allora anche $J \setminus \{f(b)\}$ é connesso. Ma questo é assurdo perché J é un intervallo aperto e quindi $J \setminus \{f(b)\}$ é sconnesso.
   Analogamente si dimostra il caso in cui $J' = [a, b)$.

2. Dimostrare che S^1 e $I = [0, 1]$ non sono omeomorfi.

   SOL: Sia $f : [0, 1] \to S^1$ un omeomorfismo tale che $f(0) = p$ e $f(1) = q$ con $p, q \in S^1$.
   Con un ragionamento analogo all'esercizio precedente:

   $$f : (0, 1) \to S^1 \setminus \{p, q\}$$

   sará ancora un omeomorfismo, ma $(0, 1)$ é connesso, mentre $S^1\{p, q\}$ non lo é perché unione di due archi.

3. Dimostrare che $\mathbb{Q}$ non é connesso.

   SOL: Si consideri $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Allora

   $$(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$$

   E dunque é un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ che é sia aperto e chiuso. Dunque $\mathbb{Q}$ non é connesso.

4. Dimostrare che $\mathbb{R}$ non é omeomorfo a $\mathbb{R}^n$, per ogni $n \geq 2$.

   SOL: Come negli esercizi precedenti, notiamo che $\mathbb{R} \setminus \{p\}$ é unione di due aperti, dunque é sconnesso, mentre invece $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ é ancora connesso.

5. Dimostrare che se X ha la topologia discreta allora gli unici insiemi connessi sono i punti.

   SOL: Qualsiasi sottoinsieme di X, con la topologia costante é aperto e chiuso, allora non puó essere connesso.

6. Dimostrare che X é connesso se e solo se ogni funzione continua da X ad uno spazio discreto é costante.

   SOL: Supponiamo che X sia connesso, allora $f(X)$ é connesso. Dunque $f(X)$ é un punto, poiché le uniche componenti connesse in uno spazio discreto sono i punti. Dunque f é costante.
   Supponiamo ora per assurdo che $X = U \cup V$, dove U e V sono aperti e chiusi di X. Allora $f : U \cup V \to Y = \{p, q\}$, sará tale che $f(u) = p$, $\forall u \in U$, mentre $f(v) = q$, $\forall v \in V$. Dunque f non é costante. Allora X é connesso.

7. Dire quali tra questi sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono connessi e connessi per archi:

   - $\{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$;
   - $\{(x, y); x^2 + y^2 > 1\}$;
   - $\{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$;
   - $\{(x, y); x^2 + y^2 \neq 1\}$;

   SOL:

   - Un disco aperto é connesso perché connesso per archi;
   - É connesso perché connesso per archi;
   - S^1 é connesso perché connesso per archi;
   - $\mathbb{R} \setminus S^1$ non é connesso, essendo unione di aperti disgiunti, allora non é connesso per archi.

8. Riconoscere quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono connessi e/o connessi per archi:

   (a) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0); x \neq 0\}$;
   (b) $B = P \setminus \{(0, y) : y \text{ irrazionale}\}$, dove $P = \{(x, y); -1 \leq x, y \geq 1\}$;
   (c) $C = D_1(1, 0) \cup D_1(-1, 0)$;
   (d) $D = \bar{C}$;
   (e) $E = C \cup \{(0, 0)\}$.

   SOL:

   (a) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0); x \neq 0\}$ connesso e connesso per archi;
   (b) $B = P \setminus \{(0, y) : y \text{ irrazionale}\}$, dove $P = \{(x, y); -1 \leq x, y \geq 1\}$ connesso e connesso per archi;
   (c) $C = D_1(1, 0) \cup D_1(-1, 0)$ non connesso, non connesso per archi;
   (d) $D = \bar{C}$ connesso e connesso per archi;
   (e) $E = C \cup \{(0, 0)\}$ connesso e connesso per archi.

9. Dimostrare che $\forall t \in \mathbb{R}^2$,
$$X_t = \{(x, y)|xy = t\}$$
non é omeomorfo a $\mathbb{R}$.

SOL:

- Se $t = 0$, allora $X_t = \{x = 0 \text{ e } y = 0\}$. Sia $f : X_t \longrightarrow \mathbb{R}$ un omeomorfismo. Ma $X_t \setminus \{(0, 0)\}$ ha 4 componenti connesse, mentre $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ne ha due. Allora f non é un omeomorfismo.
- Se $t > 0$ (o $t < 0$) allora X_t é un iperbole, che ha due componenti connessi, mentre $mathbbR$ ne ha solamente una. Dunque i due non sono omeomorfi.

10. Sia $\{A_n\}$ una successione di sottoinsiemi connessi di X tali che $A_n \cup A_{n+1} \neq \emptyset \forall n$. Dimostrare che $\bigcap_n A_n$ é connesso.

SOL: $A(n) = A_1 \cup \ldots A_n$ é connesso $\forall n \geq 1$ allora, dato che gli spazi $A(n)$ hanno un punto in comune, per esempio qualsiasi punto di A_1 la loro unione $\bigcup A(n) = \bigcup A_n$ é connesso.

11. Sia $\{A_\alpha\}$ una famiglia di sottoinsiemi connessi di X. Sia $A \subset X$ connesso. Mostrare che se $A \cap A_\alpha \neq \emptyset \forall \alpha$, allora $A \cup \{\bigcup_\alpha A_\alpha\}$ é connesso.

SOL: Per assurdo, sia $A \cup \{\bigcup_\alpha A_\alpha\} = C \cup D$ con C e D aperti disgiunti e non vuoti. Per ipotesi A é connesso, allora possiamo supporre $A \subset C$. Inoltre, dato che $A \cap A_n \neq \emptyset$ anche $A_\alpha \subset C$, $\forall \alpha$, allora $A \cup \{\bigcup_\alpha A_\alpha\} \subset C$, e dunque $D = set$, che contraddice l'ipotesi, allora $\bigcap_n A_n$ é connesso.

12. $\mathbb{R}_l$ é connesso? {l=lower limit topology}

SOL: No, infatti $\mathbb{R}_l = (-\infty, a) \cup [a, \infty)$.

13. Mostrare che se X é infinito, allora X con la topoogia cofinito é connesso.

SOL: Sia $\emptyset \subset A \subset X$ aperto e chiuso. A é aperto allora $X \setminus A$ é finito. A é chiuso allora $X \setminus A$ é aperto e $X \setminus (X \setminus A) = A$ é finito. Dunque $X = A \cup (X \setminus A)$ é finito, ma questo contraddice l'ipotesi che X sia infinito. Allora X e $\emptyset$ sono gli unici aperti e chiusi di X, allora X é connesso.

14. Sia $A \subset X$. Mostrare che se C é un sottoinsieme connesso di X che interseca sia A che $X \setminus A$, allora C interseca $Fr(A)$.

SOL: Per ipotesi $X = Int(A) \cup Fr(A) \cup Int(X \setminus A)$. Se C interseca sia A che $(X \setminus A)$, ma non $Fr(A)$, allora C interseca $A \setminus Fr(A)$ e $(X \setminus A) \setminus Fr(X \setminus A) = Int(X \setminus A)$ allora $C = (C \cap Int(A)) \cup (C \cap Int(X \setminus A))$. Dunque C é unione disgiunta di due aperti non vuoti e dunque non é connesso, contro ipotesi. Allora C interseca $Fr(A)$.

15. Sia $f : X \longrightarrow X$ continua. Mostrare che se $X = [0, 1]$ allora $\exists x \in X$ tale che $f(x) = x$. Cosa succede se $X = (0, 1)$ e $X = [0, 1)$?

SOL: Sia $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $g(x) = x - f(x)$.
$g(0) < 0$ (perché $f(0) > 0$)
$g(1) > 0$ (perché $f(1) < 0$).
Allora per il teorema del valor medio esiste $x \in [0, 1]$ tale che $G(x) = 0$, e allora $f(x) = x$.