SOLUZIONI DELL'APPELLO A DEL CORSO GE220
(4 GIUGNO 2012)

ESERCIZIO 1 (7 punti) Dato uno spazio topologico X e un sottoinsieme A di X, si denoti con $\overline{A}$ la chiusura di A.

Si dimostri che dati due sottoinsiemi A e B di X si ha che:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \tag{1}$$

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}. \tag{2}$$

Trovare due sottoinsiemi della retta euclidea $\mathbb{R}$ per cui l'inclusione nell'equazione (2) non è un'uguaglianza.

Soluzione:

Ricordiamo che:

(*) La chiusura $\overline{A}$ di A è il più piccolo chiuso di X contenente A.

Dimostriamo l'equazione (1), mostrando le due inclusioni separatamente. Il chiuso $\overline{A \cup B}$ contiene A e B; dunque contiene anche le loro chiusure $\overline{A}$ e $\overline{B}$ per (*) e quindi anche l'unione $\overline{A} \cup \overline{B}$. Viceversa, il chiuso $\overline{A} \cup \overline{B}$ contiene $A \cup B$ e dunque contiene $\overline{A \cup B}$ per (*), q.e.d.

Mostriamo ora l'equazione (2). Il chiuso $\overline{A} \cap \overline{B}$ contiene $A \cap B$ e dunque anche $\overline{A \cap B}$ per (*), q.e.d.

Si considerino ora i sottoinsiemi $A = \mathbb{Q}$ e $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ di $\mathbb{R}$. Chiaramente $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$ e quindi $\overline{\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} = \emptyset$. D'altra parte, sia $\mathbb{Q}$ che $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$ perché ogni aperto di $\mathbb{R}$ contiene almeno un elemento di $\mathbb{Q}$ e un elemento di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Quindi $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ e $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$; dunque $\overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Questo mostra che vale l'inclusione stretta nell'equazione (2).

ESERCIZIO 2 (8 punti)

Si considerino i seguenti intervalli della retta euclidea $\mathbb{R}$, muniti della topologia di sottospazio:

$$A = (0,1),$$
$$B = [0,\infty),$$
$$C = [-1,0].$$

Per ciascuna coppia di intervalli, dire se si tratta di spazi topologici omeomorfi o no, giustificando la risposta.

Soluzione:

Mostreremo che i tre intervalli sono a due a due non omeomorfi.

Innanzitutto, si osservi che, tra i tre sottospazi in esame, C è l'unico sottospazio chiuso e limitato di $\mathbb{R}$; questo implica che C è l'unico sottospazio compatto di $\mathbb{R}$ (perché sappiamo che i sottospazi compatti di $\mathbb{R}$ sono i sottospazi chiusi e limitati) e pertanto non è omemorfo né ad A né a B (perché la compattezza è una proprietà topologica).

Mostriamo ora che A non è omeomorfo a B. Supponiamo per assurdo che esista un omeomorfismo $f : B \to A$ e poniamo $x := f(0) \in A = (0,1)$. Allora f induce un omeomorfismo tra $B \setminus \{0\} = (0,\infty)$ e $A \setminus \{x\} = (0,x) \cup (x,1)$. Tuttavia $(0,\infty)$ è connesso mentre $(0,x) \cup (x,1)$ non lo é (perchè sappiamo che i sottospazi connessi di

$\mathbb{R}$ sono esattamente gli intervalli di $\mathbb{R}$) e questo è un assurdo perché la connessione è una proprietà topologica.

ESERCIZIO 3 (10 punti)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua (come al solito, $[a.b] \subset \mathbb{R}$ è munito della topologia di sottospazio). Dimostrare che:

(i) (5 punti) Se r è un numero reale tale che $f(a) \leq r \leq f(b)$ allora esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = r$.

(ii) (5 punti) Esistono $d, e \in [a, b]$ tale che $f(e) \leq f(x) \leq f(d)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Soluzione:

(i) Siccome $[a, b]$ è connesso (ricordiamo che un sottospazio di $\mathbb{R}$ è connesso se e solo se è un intervallo), allora $f([a, b]) \subset \mathbb{R}$ è connesso (perché immagine continua di un connesso), e dunque è un intervallo di $\mathbb{R}$. Dunque, siccome $f(a)$ e $f(b)$ appartengono all'intervallo $f([a, b])$, ogni r compreso tra $f(a)$ e $f(b)$ appartiene a $f([a, b])$, ovverosia $r = f(c)$ per qualche $c \in [a, b]$, q.e.d.

(ii) Siccome $[a, b]$ è compatto (ricordiamo che un sottospazio di $\mathbb{R}$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato), allora $f([a, b]) \subset \mathbb{R}$ è compatto (perché immagine continua di un compatto), e dunque è chiuso e limitato in $\mathbb{R}$. Si considerino

$$M := \sup\{f(x) \,:\, x \in [a, b]\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

$$m := \inf\{f(x) \,:\, x \in [a, b]\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Siccome $f([a, b])$ è limitato, allora M e m sono finiti, cioé $M, m \in \mathbb{R}$. Siccome $f([a, b])$ è chiuso, allora M è un massimo e m è un minimo, cioé esistono $d, e \in [a, b]$ tali che $f(d) = M$ e $f(e) = m$. Con tale scelta di d ed e, è allora chiaro che $f(e) = m \leq f(x) \leq M = f(d)$ per ogni $x \in [a, b]$, q.e.d.

ESERCIZIO 4 (18 punti)

Sia $X = [0, 1]/\sim$, dove $[0, 1]$ ha la topologia euclidea e $\sim$ è la seguente relazione di equivalenza: $x \sim y$ se e solo se $x = y$ oppure $x, y \in \{0, 1/2, 1\}$.

(i) (5 punti) Dire se X è Hausdorff e/o compatto (giustificando la risposta).

(ii) (7 punti) Dimostrare che X è omeomorfo al wedge di due circonferenze.

(iii) (6 punti) Usando il teorema di van Kampen, calcolare il gruppo fondamentale di X.

Soluzione:

(i) X è compatto perché immagine continua del compatto $[0, 1]$.

Dimostriamo ora che X è Hausdorff. Siano $p(x)$ e $p(y)$ due punti distinti di X, dove $p : [0, 1] \to X$ denota la proiezione al quoziente.

Se $x, y \notin \{0, 1/2, 1\}$ allora necessariamente $x \neq y$ e dunque possiamo scegliere $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo tale che $U_x := (x - \epsilon, x + \epsilon)$ e $U_y := (y - \epsilon, y + \epsilon)$ sono due aperti disgiunti di $[0, 1]$ che non contengono né 0, né 1, né 1/2. È facile verificare che $U_x = p^{-1}(p(U_x))$ e $U_y = p^{-1}(p(U_y))$; questo implica che $p(U_x)$ e $p(U_y)$ sono due aperti disgiunti di X che contengono, rispettivamente, $p(x)$ e $p(y)$.

Se invece $x \in \{0, 1/2, 1\}$ (e allora necessariamente $y \notin \{0, 1/2, 1\}$), allora possiamo scegliere ϵ sufficientemente piccolo tale che $V_x := [0, \epsilon) \cup (1/2 - \epsilon, 1/2 + \epsilon) \cup (1 - \epsilon, 1]$ e $V_y := (y - \epsilon, y + \epsilon)$ sono due aperti disgiunti di $[0, 1]$. È facile verificare che $U_x = p^{-1}(p(U_x))$ e $U_y = p^{-1}(p(U_y))$; questo implica che $p(U_x)$ e $p(U_y)$ sono due aperti disgiunti di X che contengono, rispettivamente, $p(x)$ e $p(y)$.

(ii) Sia Z il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ dato dall'unione di due circonferenze C_1 e C_2 di raggio 1 e centrate in $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, rispettivamente. Si noti che le due circonferenze C_1 e C_2 si toccano nel punto $(0,0)$ e chiaramente Z con la topologia di sottospazio è omeomorfo al wedge di due circonferenze.

Si consideri la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita come segue

$$f(t) = \begin{cases} (cos(2t) - 1, sen(2t)) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2, \\ (-cos(2t-1) + 1, sen(2t-1)) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

In altre parole, $f_1 := f_{|[0,1/2]}$ è una parametrizzazione della circonferenza C_1 mentre $f_2 := f_{|[1/2,1]}$ è una parametrizzazione della circonferenza C_2. Si noti che $\operatorname{Im} f = Z$ e che f è continua perchè f_1 e f_2 sono continue e $f_1(1/2) = f_2(1/2) = (0,0)$. Inoltre è chiaro che $f(x) = f(x)$ se e solo se $x \sim y$. Dunque f si fattorizza come $g \circ p$, dove $g : X \to Z$ è una funzione continua (per la proprietà universale della topologia quoziente) e biettiva per quanto osservato sopra. Inoltre X è compatto e Z è Hausdorff, dunque f è una funzione chiusa e quindi un omeomorfismo.

(iii) Notiamo innanzitutto che X è connesso per archi perché immagine continua di $[0,1]$, che è connesso per archi. Dunque, la scelta del punto base nel calcolo del gruppo fondamentale è irrilevante.

Per il punto precedente, basta calcolare il gruppo fondamentale $\pi_1(Z, x_0)$ di Z rispetto al punto $x_0 := (0,0)$ di intersezione delle due circonferenze. Consideriamo il ricoprimento aperto di Z fatto dai due aperti $U_1 : Z \backslash \{(2,0)\}$ e $U_2 := Z \backslash \{(-2,0)\}$. Per ogni $i = 1,2$, l'aperto U_i è omotopo alla circonferenza C_i (più precisamente $C_i \subset U_i$ è un ritratto di deformazione). Dunque abbiamo che $\pi_1(U_i, x_0) = \mathbb{Z}$. Inoltre l'intersezione $U_1 \cap U_2 = Z \setminus \{(2,0), (-2,0)\}$ è connessa per archi e contraibile, dunque $\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) = 0$. Possiamo allora applicare il teorema di Van Kampen che, nel nostro caso, dice che:

$$\pi_1(Z, x_0) = \pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2.$$