SOLUZIONI DELL'APPELLO B DEL CORSO GE220
(3 LUGLIO 2012)

ESERCIZIO 1 (12 punti) Sia $f : X \twoheadrightarrow Y$ una mappa quoziente tra spazi topologici e assumiamo che X sia di Hausdorff. Dimostrare che:

(i) (6 punti) Se f è chiusa e $f^{-1}(y)$ è compatto per ogni $y \in Y$ allora Y è di Hausdorff.

(ii) (6 punti) Se X è compatto, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:
 (a) Y è di Hausdorff;
 (b) f è chiusa;
 (c) Il sottoinsieme $\{(x_1, x_2) \in X \times X \ : \ f(x_1) = f(x_2)\}$ è chiuso in $X \times X$.
 [Suggerimento: usare il punto (i)]

Soluzione:

(i) Siano y_1 e y_2 due punti distinti di Y. Dalla compattezza di $f^{-1}(y_1)$ e $f^{-1}(y_2)$, insieme al fatto che X è di Hausdorff, ne deduciamo il seguente

Lemma: Esistono due aperti disgiunti U_1 e U_2 di X tali che $f^{-1}(y_1) \subset U_1$ e $f^{-1}(y_2) \subset U_2$.

Consideriamo adesso i sottoinsiemi di Y (per $i = 1, 2$):

$$V_i := Y \setminus f(X \setminus U_i) = \{y \in Y \ : \ f^{-1}(y) \subset U_i\}.$$

Siccome f è una mappa chiusa, allora V_i è un aperto di Y (per $i = 1, 2$). Inoltre, dal Lemma segue che V_1 e V_2 sono disgiunti e contengono, rispettivamente, x_1 e x_2. Ciò mostra che Y è di Hausdorff, q.e.d.

(ii) Dimostriamo le seguenti implicazioni:

(a) ⇔ (c): Il sottoinsieme $S := \{(x_1, x_2) \in X \times X \ : \ f(x_1) = f(x_2)\}$ è l'immagine inversa tramite la mappa continua $f \times f : X \times X \to Y \times Y$ della diagonale $\Delta := \{(y, y) \ : \ y \in Y\} \subset Y \times Y$. Sappiamo che Y è di Hausdorff se e solo se la diagonale Δ è un sottoinsieme chiuso di $Y \times Y$. Siccome $f \times f$ è una mappa quoziente (in quanto prodotto di mappe quozienti), allora Δ è chiuso in $Y \times Y$ se e solo se S è chiuso in $X \times X$, q.e.d.

(a) ⇒ (b): Sia C un chiuso di X. Siccome X è compatto, allora anche C sarà compatto. Dunce $f(C)$ è compatto perché la compattezza si preserva per immagini continue. Siccome Y è di Hausdorff per ipotesi, allora $f(C)$ deve essere chiuso, q.e.d.

(b) ⇒ (a): Questo segue dal punto (i) usando che il fatto che, per ogni $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ è compatto in quanto sottoinsieme chiuso dello spazio compatto X.

ESERCIZIO 2 (8 punti) Sia $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una mappa continua (come al solito, $[0, 1]$ è munito della topologia di sottospazio di $\mathbb{R}$). Dimostrare che f ammette un punto fisso, cioè esiste $x \in [0, 1]$ tale che $f(x) = x$.

Soluzione: Si consideri la funzione continua

$$g : [0, 1] \longrightarrow [-1, 1]$$
$$x \mapsto g(x) - x.$$

Siccome $[0, 1]$ è connesso (ricordiamo che un sottospazio di $\mathbb{R}$ è connesso se e solo se è un intervallo), allora $g([0, 1]) \subset \mathbb{R}$ è connesso (perché immagine continua di un connesso), e dunque è un intervallo di $\mathbb{R}$. Dunque, siccome $g(0) = f(0) \geq 0$ e $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ appartengono all'intervallo $g([0,1])$, allora anche $g(1) \leq 0 \leq g(0)$ apparterrà a $g([0,1])$, ovverosia esiste $x \in [0,1]$ tale che $g(x) = f(x) - x = 0$, q.e.d.

ESERCIZIO 3 (12 punti) Sia $X = (0,1)$ munito della topologia i cui aperti sono X, $\emptyset$ e gli intervalli $U_n := \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right)$ per $n = 2, 3, 4, \ldots$.

(i) (4 punti) Dire se X è T_0, T_1, T_2(=Hausdorff), T_3, regolare, T_4, normale.
(ii) (4 punti) Dire se X è connesso o localmente connesso.
(iii) (4 punti) Dire se X è compatto o localmente compatto.

Soluzione:

(i)
- X non è T_0 perché tutti gli aperti non vuoti di X contengono sia $1/4$ che $1/8$; dunque $\overline{\{1/4\}} = \overline{\{1/8\}}$. Di conseguenza, X non è T_1 né T_2 né regolare né normale, perché ciascuna di queste proprietà implicano T_0.
- X non è T_3: infatti si consideri il chiuso $A = [1/2, 1)$ e il punto $p = 1/4 \notin A$. Allora l'unico aperto che contiene A è X che chiaramente contiene anche p.
- X è T_4 perché non esistono chiusi non vuoti disgiunti.

(ii)
- X è connesso in quanto non ammette aperti non vuoti disgiunti.
- X è localmente connesso in quanto tutti i suoi aperti U_n (con la topologia di sottospazio) sono connessi in quanto non ammettono aperti non vuoti disgiunti.

(iii)
- X non è compatto: infatti il ricoprimento di aperti $\mathcal{U} := \{U_n\}_{n \geq 2}$ non ammette nessun sottoricoprimento finito.
- X è localmente compatto in quanto ogni punto di X è contenuto in un aperto $U_n = (0, 1 - 1/n)$ (per qualche n) che è compatto (con la topologia di sottospazio) in quanto possiede un numero finito di aperti e cioè i sottoinsiemi U_m con $m \leq n$ e l'insieme vuoto.

ESERCIZIO 4 (12 punti)
Si consideri l'azione di $\mathbb{Z}^2$ su $\mathbb{R}^2$ data da

$$(n,m) \cdot (x,y) := (x+n, y+m) \text{ per ogni } n,m \in \mathbb{Z} \text{ e } x,y \in \mathbb{R}.$$

(i) (4 punti) Dimostrare che l'azione sopre descritta è libera e propriamente discontinua.
(ii) (4 punti) Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.
(iii) (4 punti) Dimostrare che $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ è omeomorfo a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Soluzione:

(i) Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e consideriamo l'intorno di (x_0, y_0) dato dalla palla aperta $B_{1/4}(x_0, y_0)$ di raggio $1/4$. Per ogni $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, si ha ovviamente:

(*)
$$B_{1/4}(x_0+n, y_0+m) = (n,m) \cdot B_\epsilon(x_0, y_0) := \{(m,n) \cdot (z,,w) \,:\, (z,w) \in B_{1/4}(x,y)\}.$$

Se $(n,m) \neq (0,0)$ allora la distanza tra (x_0, y_0) e (x_0+n, y_0+m) sarà maggiore o uguale a uno, e dunque, usando (*), si ha che

$$B_{1/4}(x_0, y_0) \cap (n,m) \cdot B_{1/4}(x_0, y_0) = \emptyset.$$

Questo mostra che l'azione è libera e propriamente discontinua.

(ii) Notiamo intanto che $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ è connesso per archi in quanto quoziente di $\mathbb{R}^3$ che è connesso per archi. Dunque il gruppo fondamentale non dipende dal punto base $[x_0] \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ che scegliamo. Siccome l'azione di $\mathbb{Z}^2$ su $\mathbb{R}^2$ è libera e propriamente discontinua e $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso (in quanto contraibile), allora, detta $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ la mappa quoziente, si ha che

$$\mathbb{Z}^2 \cong \frac{\pi_1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2, [x_0])}{p_*(\pi_1(\mathbb{R}^2, x_0))} = \pi_1(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2, [x_0]).$$

(iii) Si consideri la mappa continua e suriettiva

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}), \end{aligned}$$

dove abbiamo identificato $\mathbb{S}^1$ con la palla unitaria dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Dalle proprietà dell'esponenziale, segue subito che $f = g \circ p$ con $g : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ biettiva e continua (per la proprietà universale della topologia quoziente). Per mostrare che g è un omeomorfismo, basta mostrare che g è un mappa aperta e ciò segue se mostriamo che f è una mappa aperta. Chiaramente f è il prodotto di due copie della funzione

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} \\ x &\mapsto e^{2\pi i x}. \end{aligned}$$

Dunque è sufficiente mostrare che exp è una mappa aperta. Questo è ben noto: exp è un rivestimento (infatti il rivestimento universale di $\mathbb{S}^1$) e dunque è una mappa aperta.