SOLUZIONI DELL'APPELLO X DEL CORSO GE220 (4 SETTEMBRE 2012)

ESERCIZIO 1 (14 punti)

(i) (8 punti) Sia X uno spazio topologico compatto di Hausdorff e Y uno spazio topologico. Dimostrare che la proiezione sul secondo fattore $p_2 : X \times Y \to Y$ è una mappa chiusa.

(ii) (6 punti) Dimostrare che la proiezione sul secondo fattore $p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ non è una mappa chiusa.

Soluzione:

(i) Sia F un sottonisieme chiuso di $X \times Y$. Dobbiamo mostrare che $p(F)$ è chiuso, o equivalentemente che $Y \setminus p(F)$ è aperto. Sia $y \in Y \setminus p(F)$. Allora $X \times Y \setminus F$ è un aperto contenente il sottoinsieme $X \times \{y\}$ che è compatto in quanto omeomorfo a X. Per il Lemma che segue, esistono due aperti $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$ tali che $X \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq X \times Y \setminus F$. Questo implica che V è un aperto di Y contenente y e interamente contenuto in $Y \setminus p(F)$. Siccome questo è vero per ogni $y \in Y \setminus p(F)$, ne deduciamo che $Y \setminus p(F)$ è aperto, q.e.d.

Lemma: Sia A un sottoinsieme compatto di uno spazio topologico X e sia y un punto di uno spazio topologico Y. Allora per ogni sottoinsieme aperto W di $X \times Y$ contenente $A \times \{y\}$ esistono due sottoinsiemi aperti $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$ tali che $A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W$.

Dimostrazione del Lemma: Per ogni $x \in A$, il punto $(x, y) \in W$ ha un intorno aperto della forma $U_x \times V_x$ (con $U_x \subseteq X$ e $V_x \subseteq Y$ due aperti) contenuto in W. Chiaramente $A \times \{y\} \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x \times V_x$ e, usando la compatezza di A, esistono un numero finito di punti $\{x_1, \cdots, x_n\}$ di A tale che $A \times \{y\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \times V_{x_i}$. Allora è facile verificare che $U := \cup_{i=1}^{n} U_{x_i} \subseteq X$ e $V := \cap_{i=1}^{n} V_{x_i} \subseteq Y$ sono due aperti che soddisfano le condizioni del Lemma.

(ii) Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ il luogo degli zeri dell'iperbole $xy - 1 = 0$. Notiamo che C è un sottonsieme chiuso perché immagine inversa di $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ tramite la mappa continua

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$(x, y) \mapsto xy - 1.$$

L'immagine di C tramite la seconda proiezione p è uguale a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, che non è un chiuso di $\mathbb{R}$. Dunque p_2 non è una mappa chiusa.

ESERCIZIO 2 (8 punti)

Sia X uno spazio compatto di Hausdorff. Dimostrare che X è metrizzabile se e solo se X è II numerabile.

Soluzione:

Dimostriamo le due inclusioni separatamente.

$\Longleftarrow$: X è II numerabile per ipotesi e regolare in quanto compatto di Hausdorff. Dunque X è metrizzabile per il teorema di metrizzabilità di Urysohn.

$\Longrightarrow$: X è Lindelöf in quanto compatto. Dunque X è II numerabile in quanto uno spazio metrizzabile è Lindelöf se e solo se è II numerabile.

ESERCIZIO 3 (14 punti)

Sia X uno spazio topologico e sia $x \in X$. Si chiama *componente quasi-connessa* di x in X, e si denota con Q_x, l'intersezione di tutti i sottoinsiemi aperti e chiusi di X che contengono x. Si chiama componente quasi-connessa di X un sottoinsieme di X della forma Q_x, per qualche $x \in X$. Dimostrare che:

(i) (4 punti) Le componenti quasi-connesse di X formano una partizione di X in sottoinsiemi chiusi a due a due disgiunti.
(ii) (4 punti) Per ogni $x \in X$, si denoti con C_x la componente connessa di x in X. Dimostrare che $C_x \subseteq Q_x$.
(iii) (6 punti) Si consideri il sottoinsieme X di $\mathbb{R}^2$ formato dai segmenti $I_i := [0,1] \times \{1/i\}$ per $i \in \mathbb{N}$ e dai punti $p_0 = (0,0)$ e $p_1 = (1,0)$. Si calcolino le componenti connesse e quasi-connesse di X.

Soluzione:

(i) Chiaramente le componenti quasi-connesse di X sono chiuse in quanto intersezione di chiusi e la loro unione è uguale a X poiché $x \in Q_x$. Rimane da fare vedere che le componenti quasi-connesse sono a due a due disgiunte.

Siano Q_x e Q_y due (possibilmente uguali) componenti quasi-connesse di X. Dobbiamo mostrare che

$$Q_x = Q_y \text{ oppure } Q_x \cap Q_y = \emptyset. \tag{*}$$

Notiamo che valgono le seguenti proprietà:

(a) Se $y \in Q_x$ allora $Q_y \subseteq Q_x$.
Infatti, se $y \in Q_x$ allora ogni sottoinsieme aperto e chiuso di X che contiene x deve contenere anche y e quindi apparirà nell'intersezione che definisce Q_y. Da questo segue la proprietà (a).

(b) Se $y \notin Q_x$ allora $Q_y \cap Q_x = \emptyset$.
Infatti, se $y \notin Q_x$ allora esiste un sottoinsieme C aperto e chiuso di x tale che $x \in C$ e $y \notin C$. Allora il complementare $X \setminus C$ è un sottoinsieme aperto e chiuso di X che contiene y. Dunque $Q_x \subseteq C$ e $Q_y \subseteq X \setminus C$, che chiaramente implica la proprietà (b).

Dimostriamo ora (*). Se $y \notin Q_x$ oppure $x \notin Q_y$ allora la proprietà (b) implica che $Q_x \cap Q_y = \emptyset$. Altrimenti, si avrà che $x \in Q_y$ e $y \in Q_x$ e quindi la proprietà (a) implica che $Q_x = Q_y$.

(ii) Sia S un sottoinsieme aperto e chiuso di X che contiene x. Allora $S \cap C_x$ è un sottoinsieme aperto e chiuso di S, non vuoto in quanto contiene x. Siccome C_x è connesso, abbiamo che $S \cap C_x = C_x$, o in altre parole che $C_x \subseteq S$. Siccome questo vale per ogni tale S, ne deduciamo che $C_x \subseteq Q_x$.

(iii) Si noti che ciascun intervallo I_i è un sottoinsieme connesso di X, che è sia aperto che chiuso. Dunque se $x \in I_i$ allora abbiamo che

$$I_i \subseteq C_x \subseteq Q_x \subseteq I_i, \tag{**}$$

dove la prima inclusione segue dal fatto che C_x è il più grande sottoinsieme connesso di X contenente x, la seconda inclusione segue dal punto (ii) e la terza inclusione segue dalla definizione di Q_x insieme al fatto che I_i è sia aperto che chiuso. Da (**) deduciamo che ciascun I_i è una componente connessa e quasi-connessa di X.

Il complementare dell'unione degli intervalli I_i in X consiste dell'unione dei due punti p_0 e p_1 con la topologia dell'unione disgiunta. Questo implica che $C_{p_0} = \{p_0\}$ e $C_{p_1} = \{p_1\}$.

Sia ora S un sottoinsieme aperto e chiuso di X che contiene p_0. Siccome X ha la topologia di sottospazio di $\mathbb{R}^2$ e S è un aperto, allora S conterrà l'intersezione di X con la palla aperta $B_{1/n}(0,0)$ di centro $p_0 = (0,0)$ e raggio $1/n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. Dunque S conterrà tutti i punti della forma $(0, 1/m)$ con $m > n$. Siccome S è aperto e chiuso e gli intervalli I_i sono connessi, necessariamente S deve contenere tutti gli intervalli I_m con $m > n$. In particolare S conterrà tutti i punti della forma $(1, 1/m)$ con $m > n$. Siccome $p_1 = (1,0)$ è un punto di accumulazione del sottoinsieme $\{(1, 1/m\}_{m>n} \subseteq X$ e S è chiuso, necessariamente si dovrà avere che $p_1 = (1,0) \in S$. Questo mostra che $Q_{p_1} \subseteq Q_{p_0}$ e dunque, per il punto (i), $Q_{p_0} = Q_{p_1} = \{p_0, p_1\}$.

ESERCIZIO 4 (14 punti)
Sia $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la sfera n-dimensionale (con $n \geq 1$). Si consideri la relazione d'equivalenza $\sim$ definita da

$$x \sim y \iff y = \pm x.$$

Dimostrare che:

(i) (4 punti) La mappa quoziente $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/\sim$ è un rivestimento.
(ii) (4 punti) $\mathbb{S}^n/\sim$ è una varietà topologica.
(iii) (6 punti) Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{S}^n/\sim$.

Soluzione:

(i) Si consideri la mappa antipodale

$$a : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n,$$
$$x \mapsto -x.$$

Chiaramente a è continua ed è un'involuzione (cioè $a \circ a = \mathrm{id}$), dunque a è un omeomorfismo.

Mostriamo ora che la mappa p è aperta. Sia U un aperto di $\mathbb{S}^n$. Siccome $p^{-1}(p(U)) = U \cup a(U)$ è un aperto di $\mathbb{S}^n$, deduciamo che $p(U)$ è un aperto di $\mathbb{S}^n/\sim$, dunque p è aperta.

Dato un punto $z \in \mathbb{S}^n$ si consideri l'emisfero aperto S_z ottenuto intersecando $\mathbb{S}^n$ con il semispazio aperto $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : (x,z) > 0\}$ dove $(,)$ è il prodotto scalare euclideo su $\mathbb{R}^{n+1}$. Chiaramente la mappa antipodale a manda S_z omeomorficamente su S_{-z}. Siccome $S_z \cap S_{-z} =$

$\emptyset$, la restrizione di p a S_z

$$p_{|S_z} : S_z \to p(S_z) = p(S_{-z})$$

è biettiva. Essendo p aperta, $p_{|S_z}$ è un omeomorfismo sull'aperto $p(S_z) = p(S_{-z})$ di $\mathbb{S}^n$. In maniera simile, la restrizione $p_{|S_{-z}} : S_{-z} \to p(S_{-z}) = p(S_z)$ è un omeomorfismo. Siccome $p^{-1}(p(S_z))$ è unione disgiunta di S_z e di S_{-z}, ne deduciamo che p è un rivestimento.

(ii) Dobbiamo mostrare che $\mathbb{S}^n/\sim$ è:
(a) Hausdorff;
(b) II numerabile;
(c) localmente omeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Useremo il fatto ben noto che $\mathbb{S}^n$ è una varietà topologica di dimensione n e dunque soddisfa le proprietà di cui sopra.

La proprietà (c) segue dal fatto che, essendo p un rivestimento (e dunque, in particolare, un omeomorfismo locale), $\mathbb{S}^n/\sim$ è localmente omeomorfo a $\mathbb{S}^n$ che a sua volta è localmente omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ (per esempio via proiezione stereografica).

La proprietà (b) segue dall'analoga proprietà per $\mathbb{S}^n$ e dal fatto che p è aperta: se $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una base per la topologia di $\mathbb{S}^n$ allora $\{p(U_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una base per la topologia di $\mathbb{S}^b/\sim$.

Mostriamo la proprietà (a). Siano $p(z_1)$ e $p(z_2)$ due punti distinti di $\mathbb{S}^n/\sim$. Sia ϵ un numero reale più piccolo della distanza minima tra i quattro punti $z_1, -z_1, z_2, -z_2$ di $\mathbb{S}^n$. Sia U_i (per $i = 1, 2$) l'aperto di $\mathbb{S}^n$ ottenuto intersecando $\mathbb{S}^n$ con la palla in $\mathbb{R}^{n+1}$ di centro z_i e di raggio ϵ. Per la nostra scelta di ϵ, gli aperti $U_1 \cup a(U_1)$ e $U_2 \cup a(U_2)$ sono disgiunti. Dunque $p(U_1)$ e $p(U_2)$ sono due aperti disgiunti di $\mathbb{S}^n/\sim$ tali che $p(z_1) \in p(U_1)$ e $p(z_2) \in p(U_2)$, q.e.d.

(iii) Notiamo innanzitutto che siccome $\mathbb{S}^n/\sim$ è connesso per archi (in quanto $\mathbb{S}^n$ lo è) il suo gruppo fondamentale non dipende dalla scelta di un punto base e verrà pertanto denotato con $\pi_1(\mathbb{S}^n/\sim)$.

Calcoliamo ora $\pi_1(\mathbb{S}^n/\sim)$ distinguendo i due casi $n \geq 2$ and $n = 1$.

- $\underline{n \geq 2}$: siccome $\mathbb{S}^n$ è semplicemente connesso e p è un rivestimento, allora p è il rivestimento universale di $\mathbb{S}^n/\sim$. Dalla teoria generale dei rivestimenti universali sappiamo che c'è una biezione tra le fibre del rivestimento universale di uno spazio e il suo gruppo fondamentale. Siccome le fibre di p constano di due punti, ne deduciamo che $\pi_1(\mathbb{S}^n/\sim)$ è un gruppo di cardinalità due; dunque necessariamente $\pi_1(\mathbb{S}^n/\sim) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- $\underline{n = 1}$: Identifichiamo $\mathbb{S}^1$ con la sfera unitaria nel piano dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Consideriamo la mappa $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ che manda $z \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ in $z^2 \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Chiaramente f è una mappa continua e suriettiva. Inoltre f è una mappa chiusa in quanto il dominio è compatto e il codominio è di Hausdorff. Dunque, f è una mappa quoziente. Siccome due punti distinti z e y sono tali che $f(z) = z^2 = y^2 = f(y)$ se e solo se $z = -y$ ne deduciamo che $f = p$. Pertanto $\mathbb{S}^1/\sim$ è omeomorfo a $\mathbb{S}^1$ e dunque

$$\pi_1(\mathbb{S}^1/\sim) = \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}.$$