SOLUZIONI DELLA PRIMA PROVA IN ITINERE
DEL CORSO GE220

ESERCIZIO 1 (6 punti) Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che:

(i) (3 punti) X è uno spazio T_1 se e solo se per ogni $x \in X$ l'intersezione di tutti gli intorni di x è uguale a $\{x\}$.

(ii) (3 punti) X è uno spazio di Hausdorff (cioè T_2) se e solo se per ogni $x \in X$ l'intersezione di tutti gli intorni chiusi di x è uguale a $\{x\}$.

Soluzione:

(i) Per ogni $x \in X$, denotiamo con S_x l'intersezione di tutti gli intorni di x. Dimostriamo le due implicazioni separatamente.

$\Longrightarrow$: Per assurdo, supponiamo che esista $x \in X$ tale che S_x contenga un punto $y \neq x$. Siccome X è T_1 per ipotesi, allora esiste un intorno U di x tale che $y \notin U$. Allora, siccome $S_x \subseteq U$, necessariamente $y \notin S$, assurdo.

$\Longleftarrow$: Siano x, y due punti distinti di X. Siccome $y \notin S_x = \{x\}$ allora esiste un intorno di x che non contiene y, dunque X è T_1.

(ii) Per ogni $x \in X$, denotiamo con T_x l'intersezione di tutti gli intorni chiusi di x. Dimostriamo le due implicazioni separatamente.

$\Longrightarrow$: Per assurdo, supponiamo che esista $x \in X$ tale che T_x contenga un punto $y \neq x$. Siccome X è T_2 per ipotesi, allora esistono due aperti disgiunti U_x e U_y di X tali che $x \in U_x$ e $y \in U_y$. Consideriamo il sottoinsieme chiuso $C := X \setminus U_y$. Siccome $U_x \cap U_y = \emptyset$, si ha che $U_x \subseteq C$ e dunque C è un intorno chiuso di x. Quindi $T_x \subseteq C$ e visto che $y \notin C = X \setminus U_y$ (poiché $y \in U_y$), necessariamente si deve avere che $y \notin T_x$, assurdo.

$\Longleftarrow$: Siano x, y due punti distinti di X. Siccome $y \notin T_x = \{x\}$ allora esiste un intorno chiuso U_x di x che non contiene y. Allora il sottoinsieme $U_y := X \setminus U_x$ è aperto e contiene y, dunque è un intorno di y. Siccome chiaramente $U_x \cap U_y = \emptyset$, concludiamo che X è T_2.

ESERCIZIO 2 (10 punti) Sia $f : X \to Y$ una mappa continua e suriettiva tra spazi topologici.

(i) (5 punti) Dimostrare che se f è aperta e il sottoinsieme

$$N := \{(x_1, x_2) \in X \times X \ : \ f(x_1) = f(x_2)\} \subseteq X \times X$$

è chiuso, allora Y è di Hausdorff.

(ii) (5 punti) Se f è aperta e chiusa e inoltre X è regolare (cioè T_1 e T_3) allora Y è di Hausdorff (cioè T_2).

[Suggerimento: usare il punto (i)].

Soluzione:

(i) Siano $y_1 \neq y_2$ due punti distinti di Y. Siccome f è suriettiva, esistono due punti x_1 e x_2 di X tali che $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Per costruzione, abbiamo allora che $(x_1, x_2) \in X \times X \setminus N$. Siccome N è chiuso in $X \times X$, allora esistono intorni aperti U_1 di x_1 e U_2 di x_2 tali che

$$U_1 \times U_2 \cap N = \emptyset. \qquad (*)$$

(Ricordiamo che gli intorni della forma $U_1 \times U_2$, al variare di U_1 intorno di x_1 e U_2 intorno di x_2, formano una base di intorni di $(x_1, x_2) \in X \times X$).

Siccome f è aperta, otteniamo due intorni aperti $f(U_1)$ di $f(x_1) = y_1$ e $f(U_2)$ di $f(x_2) = y_2$ che inoltre sono disgiunti per (*).

(ii) Osserviamo innanzitutto che Y è T_1. Infatti, dato $y \in Y$, siccome f è suriettiva, esiste $x \in X$ tale che $f(x) = y$. Siccome $\{x\}$ è chiuso in X (X è T_1 per ipotesi) e f è una mappa chiusa, ne deduciamo che $\{y\}$ è chiuso.

Ora, per il punto (i), basta dimostrare che N è chiuso. Sia $(x_1, x_2) \in X \times X \setminus N$, il che equivale a dire che $x_1 \notin f^{-1}(f(x_2))$. Siccome Y è T_1 per quanto osservato sopra e f è continua, abbiamo che $f^{-1}(f(x_2))$ è un chiuso di X. Dunque, siccome X è T_3 per ipotesi, esistono due aperti disgiunti U e V tali che $x_1 \in U$ e $f^{-1}(f(x_2)) \subseteq V$. Consideriamo ora il sottoinsieme $W := f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus V))$ di X. Notiamo che W è aperto perché f è chiusa ed è facile verificare che

$$f^{-1}(f(x_1)) \subset W = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus V)) \subseteq V.$$

Inoltre, siccome $U \subseteq X \setminus V$ per costruzione, abbiamo che

$$f(U) \cap f(W) \subseteq f(X \setminus V) \cap [Y \setminus f(X \setminus V)] = \emptyset,$$

da cui deduciamo che $U \times W$ è un intorno aperto di (x_1, x_2) che è disgiunto da N. Dunque (x_1, x_2) non appartiene alla chiusura di N, da cui segue che N è chiuso, q.e.d.

ESERCIZIO 3 (12 punti) Sia Z uguale alla retta reale $\mathbb{R}$ con la topologia avente per base gli insiemi della forma $[a, b)$ con $a < b$. Dimostrare che:

(i) (6 punti) Z è normale (cioè T_1 e T_4).

(ii) (6 punti) Z è separabile, I numerabile, Lindelöf ma non II numerabile. Z è uno spazio metrizzabile?

Soluzione:

(i)
- Z è T_1, ovverosia i punti sono chiusi. Infatti, osserviamo che il complementare di un punto $p \in Z$ è uguale a
$$Z \setminus \{p\} = (-\infty, p) \cup (p, +\infty).$$
Dunque basta mostrare che gli intervalli $(-\infty, p)$ e $(p, +\infty)$ sono aperti di Z. Questo segue dalle due rappresentazioni:
$$(-\infty, p) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [p - n, p),$$
$$(p, +\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[p + \frac{1}{n}, p + n\right).$$
- Z è T_4. Infatti, siano A e B chiusi disgiunti di Z. Siccome gli aperti della forma $[a, b)$ con $a < b$ formano un sistema fondamentale di intorni di $a \in Z$, per ogni $a \in A \subseteq X \setminus B$ esiste un $x_a \in X$ tale che $[a, x_a) \subseteq X \setminus B$. Definiamo $U_A := \bigcup_{a \in A} [a, x_a)$. Chiaramente U_A è un aperto di Z che contiene A ed è disgiunto da B. In maniera analoga, per ogni $b \in B \subseteq X \setminus A$ esiste un $y_b \in X$ tale che $[b, y_b) \subseteq X \setminus A$. Definiamo $U_B := \bigcup_{b \in B} [b, y_b)$. Chiaramente U_B è un aperto di Z che contiene B ed è disgiunto da A.
Asseriamo che U_A e U_B sono disgiunti, il che concluderebbe la dimostrazione del fatto che Z è T_4. Infatti, se per assurdo $U_A \cap U_B \neq \emptyset$, allora esisterebbero $a \in A$ e $b \in B$ tale che $[a, x_a) \cap [b, y_b) \neq \emptyset$. Possiamo supporre, a meno di scambiare A con B, che $a < b$. Allora si ha che
$$[a, x_a) \cap [b, y_b) \neq \emptyset \Rightarrow b \in [a, x_a) \subseteq U_A,$$
e questo è un assurdo perché per costruzione abbiamo che $U_A \cap B = \emptyset$.

(ii) Dimostriamo le diverse proprietà separatamente.

- Z è I numerabile siccome gli aperti della forma $\left[a, a + \dfrac{1}{n}\right)$ formano una base di intorni di $a \in Z$.
- Z è separabile in quanto il sottoinsieme numerabile $\mathbb{Q} \subset Z$ dei numeri razionali è denso in Z. Infatti ogni aperto della base $[a, b)$ di Z (con $a < b$) contiene un qualche numero razionale. Dunque $\overline{\mathbb{Q}} = Z$.
- Z non è II numerabile. Infatti, supponiamo per assurdo che esista una base numerabile $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ di Z. Ciascuno degli aperti U_i deve contenere un intervallo semiaperto della forma $[a_i, b_i)$ per qualche $a_i < b_i$, perché tali intervalli formano una base della topologia. Dunque anche la collezione $\mathcal{U} := \{[a_i, b_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ forma una base della topologia su Z. Consideriamo adesso un elemento $a \in Z$ tale che $a \neq a_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ (tale elemento esiste perchè Z è chiaramente un insieme non numerabile). Allora per ogni $b > a$, l'aperto $[a, b)$ non può essere unione di aperti appartenenti a $\mathcal{U}$, assurdo.
- Z è Lindelöff. Infatti, basta mostrare che un ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di Z della forma $\mathcal{U} := \{[a_i, b_i)\}_{i\in I}$ ammette un sottoricoprimento numerabile. Consideriamo la collezione di aperti per la topologia euclidea su $\mathbb{R}$ data da $\mathcal{V} := \{(a_i, b_i)\}_{i\in I}$. La collezione $\mathcal{V}$ forma un ricoprimento aperto di

$$W := \bigcup_{i\in I} (a_i, b_i) \subseteq \mathbb{R},$$

rispetto alla topologia indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}$. Siccome sappiamo che W è Lindelöff (perché la topologia euclidea gode di questa proprietà), allora esiste un sottoinsieme numerabile $J \subseteq I$ tale che

(*) $$W = \bigcup_{i\in J} (a_i, b_i).$$

Da questo segue facilmente che il sottoinsieme

$$\mathcal{U}' := \{[a_i, b_i)\}_{i\in J} \subseteq \mathcal{U}$$

forma un ricoprimento numerabile di Z, q.e.d.
- Z non é metrizzabile perché uno spazio metrizzabile separabile é anche II numerabile.

ESERCIZIO 4 (5 punti) Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che X è compatto se e solo se ogni famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi chiusi di X tale che

(0.1) $$\bigcap_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset \text{ per ogni } \{C_1, \cdots, C_n\} \subseteq \mathcal{F} \text{ (per qualche } n \in \mathbb{N})$$

soddisfa

(0.2) $$\bigcap_{C\in\mathcal{F}} C \neq \emptyset.$$

Soluzione:

Data una famiglia $\mathcal{F}$ di chiusi di X, consideriamo la famiglia $\mathcal{U}$ costituita da tutti gli aperti di X che sono il complementare di qualche chiuso appartenente a $\mathcal{F}$. Le leggi di De Morgan implicano che (per ogni collezione finita $\{C_1, \cdots, C_n\} \subseteq \mathcal{F}$)

(0.3) $$\bigcap_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset \Longleftrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus C_i) \neq X$$

$$\bigcap_{C\in\mathcal{F}} C \neq \emptyset. \iff \bigcup_{C\in\mathcal{F}} (X \setminus C) \neq X \tag{0.4}$$

Dunque:

- $\mathcal{F}$ soddisfa la proprietà (0.1) se e solo se $\mathcal{U}$ non ammette sottoricoprimenti finiti;
- $\mathcal{F}$ soddisfa la proprietà (0.2) se e solo se $\mathcal{U}$ non è un ricoprimento di X.

Dunque X verifica la condizione dell'enunciato sulle famiglie di chiusi se e solo se ogni famiglia $\mathcal{U}$ di aperti di X, tale che $\mathcal{U}$ non ammette sottoricoprimenti finiti, non forma un ricoprimento di X. Ovviamente questo equivale alla compattezza di X.

ESERCIZIO 5 (9 punti)

Sia d la distanza euclidea su $\mathbb{R}^2$ e $\underline{0}$ l'origine di $\mathbb{R}^2$. Consideriamo la funzione $d^* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definita da

$$d^*(x, y) = \begin{cases} d(x, \underline{0}) + d(\underline{0}, y) & \text{se } x \neq y, \\ 0 & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Dimostrare che:

(i) (3 punti) d^* è una metrica su $\mathbb{R}^2$.

(ii) (3 punti) La topologia τ_{d^*} indotta da d^* è più fine della topologia euclidea τ_d indotta da d; tuttavia $\tau_{d^*} \neq \tau_d$.

Dire se:

(a) (3 punti) d^* è completa o totalmente limitata.

Soluzione:

(i) d^* è una metrica perché:

- d^* è simmetrica: ovvio.
- $d^*(x, x) = 0$ per definizione; se invece $x \neq y$ allora possiamo supporre, a meno di scambiare x con y, che $x \neq \underline{0}$ e dunque
$$d^*(x, y) \geq d(x, \underline{0}) > 0.$$
- d^* soddisfa la disuguaglianza triangolare. Infatti, dati tre elementi x, y e z a due a due distinti (altrimenti la disuguaglianza triangolare è banalmente soddisfatta) abbiamo che

$$d^*(x, y) = d(x, \underline{0}) + d(y, \underline{0}) \leq d(x, \underline{0}) + d(z, \underline{0}) + d(z, \underline{0}) + d(y, \underline{0}) = d^*(x, z) + d^*(z, y).$$

(ii) Osserviamo innanzitutto che per ogni $x \neq y$ si ha che

$$d^*(x, y) = d(x, \underline{0}) + d(\underline{0}, y) \geq d(x, y).$$

Quindi la palla $B_r^{d^*}(x)$ di raggio r e centro x rispetto alla metrica d^* è sicuramente contenuta nella palla $B_r^d(x)$ di raggio r e centro x rispetto alla metrica d. Pertanto la topologia τ_{d^*} è più fine della topologia euclidea τ_d.

Sia ora $x \neq \underline{0}$ e scegliamo un numero reale ϵ tale che $0 < \epsilon < d(x, \underline{0})$. Allora se $y \neq x$ abbiamo che

$$d^*(x, y) = d(x, \underline{0}) + d(y, \underline{0}) \geq d(x, \underline{0}) > \epsilon.$$

Dunque la palla $B_\epsilon^{d^*}(x)$ è uguale al singoletto $\{x\}$, e quindi $\{x\} \in \tau_{d^*}$. D'altra parte chiaramente $\{x\}$ non è un aperto per la topologia euclidea, e quindi $\{x\} \notin \tau_d$. Ciò mostra che $\tau_{d^*} \neq \tau_d$.

(a)
- d^* è completa. Infatti sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy rispetto alla metrica d^*. Siccome $d^* \geq d$ (come mostrato sopra) allora (x_n) è una successione di Cauchy anche rispetto a d. Siccome la metrica euclidea d è completa, allora (x_n) converge ad un certo elemento $y \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla

topologia euclidea τ_d. Facciamo ora vedere che (x_n) converge a y anche rispetto alla topologia τ_{d^*}. Infatti se $y = \underline{0}$ allora

$$d^*(x_n, \underline{0}) = d(x_n, \underline{0}) \longrightarrow 0,$$

il che mostra che (x_n) converge a $\underline{0}$ anche rispetto alla topologia τ_{d^*}. Se invece $y \neq \underline{0}$ allora, usando il fatto che (x_n) è di Cauchy rispetto a d^* e (x_n) converge a y rispetto alla topologia τ_d, si ha che per ogni $0 < \epsilon < \dfrac{2}{3} d(\underline{0}, y)$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale

$$(*) \qquad \begin{cases} d(x_n, y) < \epsilon \ \text{ per ogni } n \geq N, \\ d^*(x_n, x_N) < \epsilon \ \text{ per ogni } n \geq N. \end{cases}$$

Per ogni $n \geq N$ tale che $x_n \neq x_N$, allora si ha che (usando la disuguaglianza triangolare per d e le proprietá (*))

$$\begin{aligned} d^*(x_n, x_N) = d(x_n, \underline{0}) + d(\underline{0}, x_N) \geq d(\underline{0}, y) - d(x_n, y) + d(\underline{0}, y) - d(x_N, y) = \\ = 2d(\underline{0}, y) - 2\epsilon > \epsilon, \end{aligned}$$

il che contraddice (*). Dunque necessariamente dobbiamo avere che $x_n = x_N$ per ogni $n \geq N$. Siccome (x_n) converge a y rispetto a τ_d allora necessariamente $x_N = y$ e dunque (x_n) converge a y anche rispetto alla topologia τ_{d^*}.

- d^* non è totalmente limitata. Infatti, se lo fosse, siccome d^* é completa (come mostrato sopra), allora $(\mathbb{R}^2, \tau_{d^*})$ sarebbe compatto. Tuttavia $\tau_{d^*} \succneqq \tau_d$ (come mostrato nel punto (ii)) e siccome sappiamo che $(\mathbb{R}^2, \tau_d)$ non é compatto, allora neanche $(\mathbb{R}^2, \tau_{d^*})$ puó essere compatto.