SOLUZIONI DELLA SECONDA PROVA IN ITINERE DEL CORSO GE220

ESERCIZIO 1 (5 punti) Si consideri l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ con la topologia di sottospazio della rette reale $\mathbb{R}$. Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti proprietà topologiche sono possedute da $\mathbb{Q}$:

(i) completamente regolare (o di Tychonoff);
(ii) localmente compatto;
(iii) paracompatto.

Soluzione:
Si noti che $\mathbb{Q}$ è uno spazio metrico in quanto sottospazio dello spazio metrico euclideo $\mathbb{R}$. Dunque $\mathbb{Q}$ è normale, in particolare completamente regolare, e paracompatto per il teorema di Stone.

D'altra parte, $\mathbb{Q}$ non è localmente compatto. Infatti $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ (perché ogni intervallo di $\mathbb{R}$ contiene un punto razionale) ma non è aperto (perché ogni intervallo di $\mathbb{R}$ contiene un punto irrazionale). Pertanto, $\mathbb{Q}$ non è localmente chiuso in $\mathbb{R}$ e dunque, poiché $\mathbb{R}$ è di Hausdorff e localmente compatto, $\mathbb{Q}$ non è localmente compatto (poiché i sottospazio localmente compatti di uno spazio localmente compatto di Hausdorff sono esattamente i sottoinsiemi localmente chiusi).

ESERCIZIO 2 (7 punti) Dimostrare che il prodotto (arbitrario) di spazi completamente regolari é completamente regolare.

Soluzione: Sia $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ e supponiamo che X_α sia completamente regolare (cioè T_1 e $T_{3/2}$) per ogni $\alpha \in I$.

- Per dimostrare che X è T_1, si considerino due punti distinti $p = (p_\alpha)$ e $q = (q_\alpha)$ di X. Siccome p e q sono distinti, esiste $\beta \in I$ tale che $p_\beta \neq q_\beta$. Siccome X_β è T_1 per ipotesi, esistono due aperti U e V di X_β tali che $p_\beta \in U \setminus V$ e $q_\beta \in V \setminus U$. Detta $\pi_\beta : X \to X_\beta$ la proiezione sul fattore X_β, si considerino i due aperti $\pi_\beta^{-1}(U)$ e $\pi_\beta^{-1}(V)$ di X. Per costruzione è chiaro che $p \in \pi_\beta^{-1}(U) \setminus \pi_\beta^{-1}(V)$ e $q \in \pi_\beta^{-1}(V) \setminus \pi_\beta^{-1}(U)$. Questo mostra che X è T_1.
- Per dimostrare che X è $T_{3/2}$, consideriamo un chiuso A di X e un punto $p = (p_\alpha)$ di X non appartenente ad A. Per definizione di topologia prodotto, esiste un intorno aperto U di p che non interseca A e tale che
$$U := \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_i),$$
per un certo sottoinsieme finito $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq I$ e degli aperti $U_i \subseteq X_{\alpha_i}$ (come al solito $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ denota la proiezione sul fattore X_α). Siccome X_{α_i} è $T_{3/2}$ per ipotesi per ogni $1 \leq i \leq n$, esistono funzioni continue $\phi_i : X_{\alpha_i} \to [0,1]$ tale che $\phi_i(p_{\alpha_i}) = 1$ e $\phi_i(X_{\alpha_i} \setminus U_i) = 0$. La funzione composta $f_i := \phi_i \circ \pi_{\alpha_i} : X \to [0,1]$ è tale che $f_i(p) = 1$ e $f_i(X \setminus \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_i)) = 0$. Consideriamo ora la funzione
$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow [0,1] \\ p &\mapsto \prod_{i=1}^{n} f_i(p). \end{aligned}$$

La funzione f è continua in quanto composizione della funzione continua $(f_1, \ldots, f_n) : X \to [0,1]^n$ che manda p in $(f_1(p), \ldots, f_n(p))$ con la funzione continua di moltiplicazione $m : [0,1]^n \to [0,1]$ che manda $(x_1, \ldots, x_n)$ in $\prod_{i=1}^n x_i$. Per costruzione, abbiamo che

$$f(p) = \prod_i f_i(p) = 1,$$

$$f(A) \subseteq f(X \setminus U) = f\left(\bigcup_{i=1}^n (X \setminus \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_i))\right) = \bigcup_{i=1}^n f\left(X \setminus \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_i)\right) = 0.$$

Questo mostra che X è $T_{3/2}$.

ESERCIZIO 3 (17 punti)

Sia X uno spazio topologico. Sia X^* un insieme contenente X come sottoinsieme e tale che $X^* \setminus X$ consiste di un solo punto, che denotiamo con ∞. Si consideri la topologia su X^* i cui insiemi aperti sono i sottoinsiemi $U \subseteq X \subset X^*$ con U aperto di X e i sottoinsiemi della forma $X^* \setminus C$ con C sottoinsieme compatto di X. Dimostrare che:

(i) (3 punti) X^* é compatto e X é aperto in X^*.

(ii) (3 punti) X é denso in X^* se e solo se X non é compatto.

(iii) (3 punti) X^* é di Hausdorff se e solo se X é di Hausdorff e localmente compatto.

(iv) (4 punti) Sia $X \subseteq Z$ una compattificazione di X e supponiamo che X sia localmente compatto. Dimostrare che esiste un'unica mappa continua $f : Z \to X^*$ che è l'identità su X.

(v) (4 punti) Sia $X = \mathbb{N}_{>0} \subset \mathbb{R}$ con la topologia di sottospazio. Dimostrare che X^* é omeomorfo al sottospazio Y di $\mathbb{R}$ dato da

$$Y = \{0\} \cup \{1/n \,:\, n \in \mathbb{N}_{>0}\}.$$

Soluzione:

(i) X è aperto in sé stesso e dunque in X^* per la definizione della topologia di X^*. Per dimostrare che X^* è compatto, si consideri un ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X^* e facciamo vedere che esso ammette un sottoricoprimento finito. Almento uno degli aperti di $\mathcal{U}$ deve essere della forma $X^* \setminus C$ con C compatto di X. Consideriamo il ricoprimento aperto di C dato da

$$\mathcal{U}_C := \{U \cap C \,:\, U \in \mathcal{U}\}.$$

Siccome C è compatto, $\mathcal{U}_C$ possiede un sottoricoprimento finito, cioé esistono $\{U_1, \ldots, U_n\} \subseteq \mathcal{U}$ tali che $C \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$. Chiaramente il sottoinsieme $\{X^* \setminus C, U_1, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{U}$ forma un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$, q.e.d.

(ii) Siccome $X^* \setminus X$ consiste solo del punto ∞, X non è denso in X^* se e solo se ∞ non appartiene alla chiusura di X. Questo si verifica se e solo se esiste un aperto di ∞ che non interseca X, o in altre parole se e solo se ∞ è aperto in X^*. Siccome gli aperti di X^* che contengono ∞ sono della forma $X^* \setminus C$, con C compatto di X, $\infty = X^* \setminus X$ è aperto in X^* se e solo se X è compatto.

(iii) Se X^* è di Hausdorff, allora X è di Hausdorff in quanto sottospazio di uno spazio di Hausdorff e localmente compatto in quanto aperto di uno spazio compatto di Hausdorff.

Viceversa, supponiamo che X sia di Hausdorff e localmente compatto. Siano p e q due punti distinti di X^*. Se $p, q \in X$ allora, siccome X è di Hausdorff, esistono due aperti disgiunti U e V di X tali che $p \in U$ e $q \in V$. Allora U e V sono anche aperti disgiunti di X^* che separano p e q. Se invece $p = \infty$ e $q \in X$, allora consideriamo un intorno compatto C di q in X.

L'interno C^o di C è un intorno aperto di q in X^* che è disgiunto da $X^* \setminus C$, che a sua volta, è un intorno aperto di $p = \infty$ in X^*, q.e.d.

(iv) Si consideri la funzione $f : Z \to X^*$ definita da

$$f(z) = \begin{cases} z & \text{se } z \in X, \\ \infty & \text{se } z \notin X. \end{cases} \tag{0.1}$$

Chiaramente f è l'identità su X per definizione. Mostriamo che f è continua. Osserviamo dapprima che $X \subseteq Z$ è un aperto in quanto denso (per definizione di compattificazione) e localmente chiuso (in quanto sottoinsieme localmente compatto di uno spazio di Hausdorff). Se U è un aperto di X, allora $f^{-1}(U) = U \subseteq X \subseteq Z$ è aperto in Z perché composizione di due inclusioni aperte. Se invece $U = X^* \setminus C$ per un sottoinsieme compatto C di X, allora $f^{-1}(X^* \setminus C) = Z \setminus C$ è aperto perchè C è chiuso in Z in quanto sottoinsieme compatto dello spazio di Hausdorff Z.

Sia $f' : Z \to X^*$ un'altra funzione verificante le suddette proprietà. Notiamo che X^* è di Hausdorff per il punto (iii) in quanto X è localmente compatto per ipotesi e di Hausdorff in quanto sottospazio dello spazio di Hausdorff Z. Allora f e f' sono due funzioni continue da Z allo spazio di Hausdorff X^* che coincidono sull'aperto denso $X \subseteq Z$, e dunque necessariamente $f = f'$.

(v) Notiamo che la topologia di sottospazio $\mathbb{N}_{>0} \subset \mathbb{R}$ è la topologia discreta, e dunque $\mathbb{N}_{>0}$ è localmente compatto. Lo spazio Y soddisfa le seguenti proprietà:

- Y è di Hausdorff in quanto sottospazio di $\mathbb{R}$ e compatto in quanto chiuso e limitato di $\mathbb{R}$;
- Il sottospazio $\{1/n : n \in \mathbb{N}_{>0}\} \subseteq Y$ è aperto ed ha la topologia discreta, e quindi può essere identificato a $\mathbb{N}_{>0}$ tramite l'omemorfismo che manda $n \in \mathbb{N}_{>0}$ in $1/n \in Y$.

Quindi Y è una compattificazione di $\mathbb{N}_{>0}$. Pertanto, per il punto (iv), esiste una (unica) mappa continua $f : Y \to (\mathbb{N}_{>0})^*$ tale che

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = n,$$
$$f(0) = \infty.$$

Quindi la mapp f è biettiva. Inoltre, f è una mappa chiusa: se $C \subseteq Y$ è un chiuso, allora C è compatto perché Y è compatto; quindi $f(C)$ è compatto e dunque chiuso perché $(\mathbb{N}_{>0})^*$ è di Hausdorff. Quindi f è un omemorfismo perché f è una mappa continua, biettiva e chiusa.

ESERCIZIO 4 (11 punti)

Sia $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la sfera n-dimensionale (con $n \geq 1$). Si consideri l'azione di $\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ su $\mathbb{S}^n$ tale che il generatore i di $\mathbb{Z}_2$ agisce su $\mathbb{S}^n$ tramite l'omeomorfismo che manda il vettore $x \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ in $-x \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dimostrare che:

(i) (3 punti) L'azione di $\mathbb{Z}_2$ su $\mathbb{S}^n$ è libera e propriamente discontinua.
(ii) (4 punti) Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$ per $n \geq 2$.
(iii) (4 punti) Dimostrare che $\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2$ è omeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

Soluzione:

(i) Dato un punto $p \in \mathbb{S}^n$ si consideri l'emisfero aperto S_p ottenuto intersecando $\mathbb{S}^n$ con il semispazio aperto $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : (x, p) > 0\}$ dove $(,)$ è il prodotto scalare euclideo su $\mathbb{R}^{n+1}$. Chiaramente l'involuzione i manda S_p omeomorficamente su S_{-p}. Siccome $S_p \cap S_{-p} = \emptyset$. l'azione è libera e propriamente discontinua.

(ii) Scegliamo un punto $x_0 \in \mathbb{S}^n$ e sia $[x_0] \in \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$ la sua immagine tramite la mappa quoziente $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$. Sappiamo che $\mathbb{S}^n$ è semplicemente connesso per $n \geq 2$; dunque $\pi_1(\mathbb{S}^n, x_0) = 0$. Inoltre, siccome $\mathbb{S}^n$ è localmente connesso per archi e connesso per archi e l'azione di $\mathbb{Z}_2$ su $\mathbb{S}^n$ è libera e propriamente discontinua, allora dalla teoria delle azioni di gruppi libere e propriamente discontinue sappiamo che

$$\mathbb{Z}_2 = \pi_1(\mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2, [x_0])/p_*(\pi_1(\mathbb{S}^n, x_0)) = \pi_1(\mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2, [x_0]).$$

(iii) Identifichiamo $\mathbb{S}^1$ con la sfera unitaria nel piano dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Consideriamo la mappa $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ che manda $z \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ in $z^2 \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Chiaramente f è una mappa continua e suriettiva. Inoltre f è una mappa chiusa in quanto il dominio è compatto e il codominio è di Hausdorff. Dunque, f è una mappa quoziente. Due punti distinti z e y sono tali che $f(z) = z^2 = y^2 = f(y)$ se e solo se $z = -y$. Questo implica che f è la mappa quoziente per l'azione di $\mathbb{Z}_2$; in particolare $\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{S}^1$, q.e.d.