SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI DI PREPARAZIONE ALLA PRIMA PROVA IN ITINERE

ESERCIZIO 1 (4 punti) Sia X uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$ uno sottoinsieme di X munito della topologia di sottospazio. Dimostrare che se X è uno spazio regolare (cioè T_1 e T_3), allora anche A è uno spazio regolare.

Soluzione:

- Mostriamo prima che A è uno spazio T_1, facendo vedere che i punti di A sono chiusi di A. Sia p un punto di A. Siccome X é uno spazio T_1 per ipotesi, allora il singoletto $\{p\}$ è un sottoinsieme chiuso di X. Per definizione di topologia di sottospazio, l'intersezione $A \cap \{p\}$ è un chiuso di A; siccome $p \in A$, allora $\{p\} = \{p\} \cap A$ e dunque $\{p\}$ è un chiuso di A, q.e.d.
- Mostriamo ora che A è uno spazio T_3. Sia C un chiuso di A e sia p un punto di A non appartenente a C. Per definizione di topologia di sottospazio, esiste un chiuso C' di X tale che $C = C' \cap A$. Dato che $p \in A - C$ e $C' \cap A = C$, sicuramente $p \notin C'$. Siccome X é uno spazio T_3, allora esistono due aperti U' e V' disgiunti di X tale che $p \in U'$ e $C' \subseteq V'$. Le intersezioni $U := U' \cap A$ e $V := V' \cap A$ sono aperti disgiunti di A e chiaramente $p \in A \cap U' = U$ e $C \subset A \cap V' = V$. Questo mostra che X è uno spazio T_3.

ESERCIZIO 2 (6 punti) Siano X_α spazi topologici, con α che varia in un insieme di indici I, e sia $X := \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ munito della topologia di prodotto. Dimostrare che:

(i) (3 punti) Se X_α è di Hausdorff (cioè T_2) per ogni $\alpha \in I$ allora X è di Hausdorff;

(ii) (3 punti) Se X è di Hausdorff allora X_α è di Hausdorff per ogni $\alpha \in I$.

Soluzione:

(i) Siano $x := \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ e $y := \{y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ due punti distinti di X. Siccome $x \neq y$, allora esiste $\beta \in I$ tale che $x_\beta \neq y_\beta$. Dato che X_β è uno spazio di Hausdorff allora esistono due aperti disgiunti U e V di X_β tale che $x_\beta \in U$ e $y_\beta \in V$. Allora si ha che $\pi_\beta^{-1}(U)$ e $\pi_\beta^{-1}(V)$ sono due aperti disgiunti di X (dove $\pi_\beta : X \to X_\beta$ denota la proiezione al fattore β-esimo) tali che $x \in \pi_\beta^{-1}(U)$ e $y \in \pi_\beta^{-1}(V)$. Dunque X è di Hausdorff.

(ii) Per mostrare che X_α è Hausdorff, faremo vedere che i limiti di successioni generalizzate sono unici. Sia dunque $\{x_\lambda\}_{\lambda \in L}$ una successione generalizzata in X_α (parametrizzata da un insieme diretto L) e supponiamo che $x_\lambda \longrightarrow y_1$ e $x_\lambda \longrightarrow y_2$. Per ogni $\alpha \neq \beta \in I$ scegliamo un elemento $t_\beta \in X_\beta$ (qui usiamo l'assioma della scelta). Per ogni $\lambda \in I$, consideriamo la funzione $f_\lambda : I \to \prod_{\beta\in I} X_\beta$ definita da

$$f_\lambda(\beta) = \begin{cases} x_\lambda & \text{se } \beta = \alpha, \\ t_\beta & \text{se } \beta \neq \alpha. \end{cases}$$

Chiaramente $f_\lambda(\beta) \in X_\beta$ per ogni $\beta \in I$ e dunque $f_\lambda \in \prod_{\beta\in I} X_\beta = X$. Analogamente consideriamo (per $i = 1, 2$) l'elemento f_i di X definito da

$$f_i(\beta) = \begin{cases} y_i & \text{se } \beta = \alpha, \\ t_\beta & \text{se } \beta \neq \alpha. \end{cases}$$

È allora chiaro che $f_\lambda \longrightarrow f_1$ e $f_\lambda \longrightarrow f_2$ in X, dato che la convergenza di una successione generalizzata in un prodotto equivale alla convergenza coordinata per coordinata. Siccome X è Hausdorff per ipotesi, otteniamo che $f_1 = f_2$, che implica $y_1 = y_2$, q.e.d.

ESERCIZIO 3 (8 punti) Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ l'unione delle rette $\{y = 0\}$ e $\{y = 1\}$ in $\mathbb{R}^2$ (con coordinate x e y) munito della topologia di sottospazio. Sia $\sim$ la relazione d'equivalenza su X tale che $(x, 1) \sim (x, 0)$ per ogni $x \neq 0$. Sia $Y := X/\sim$ munito della topologia quoziente e sia $p : X \twoheadrightarrow Y$ la mappa di proiezione al quoziente. Dimostrare che:

(i) (4 punti) p è una mappa aperta ma non chiusa;
(ii) (4 punti) Y è T_1 ma non è uno spazio di Hausdorff (cioè T_2).

Soluzione: Siano R_1 la retta $\{y = 0\}$, R_2 la retta $\{y = 1\}$ e $\phi : R_1 \to R_2$ l'omemorfismo che manda $(x, 0)$ in $(x, 1)$. Notiamo che X è omeomorfo all'unione disgiunta di R_1 e R_2 con la topologia dell'unione disgiunta.

(i) Dividiamo la dimostrazione in due parti:
- p non è chiusa. Infatti, consideriamo il chiuso $R_1 \subset X$. Dalla definizione di $\sim$, otteniamo

$$p^{-1}(p(R_1)) = R_1 \coprod (R_2 \setminus \{(0, 1)\}) \subset R_1 \coprod R_2 = X,$$

che chiaramente non è chiuso perché $R_2 \setminus \{(0, 1)\}$ non è chiuso in R_2.
- p è aperta. Infatti sia U un aperto di X. Allora U è l'unione disgiunta di due aperti $U_1 \subseteq R_1$ e $U_2 \subseteq R_2$. Dalla definizione di $\sim$, segue che

$$p^{-1}(p(U)) = \big(U_1 \cup (\phi^{-1}(U_2) \setminus \{(0, 0)\})\big) \coprod \left(U_2 \cup (\phi(U_1) \setminus \{(0, 1)\})\right),$$

che chiaramente è aperto in X, q.e.d.

(ii) Dividiamo la dimostrazione in due parti:
- Y è T_1, o equivalentemente i punti di Y sono chiusi. Sia $z \in Y$. Vogliamo dimostrare che $p^{-1}(\{z\})$ è chiuso in X, il che equivale al fatto che $\{z\}$ sia chiuso in Y. Se $z = p((0, 0))$ allora $p^{-1}(\{z\}) = \{(0, 0)\}$ che è chiuso in X. Analogamente, se $z = p((0, 1))$ allora $p^{-1}(\{z\}) = \{(0, 1)\}$ che è chiuso in X. Infine se $z = p((x, 0)) = p((x, 1))$ per qualche $x \neq 0$, allora $p^{-1}(\{z\}) = \{(x, 0), (x, 1)\}$ che è chiuso in X.

- Y non è di Hausdorff. Infatti, consideriamo le due successioni su X definite da $x_n := (1/n, 0)$ e $y_n := (1/n, 1)$. Dalla definizione di $\sim$, segue che $p(x_n) = p(y_n)$ in Y per ogni $n \in \mathbb{N}$. Chiaramente, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $(0, 0)$ mentre $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $(1, 1)$. Quindi, poiché la mappa p è continua, si ha che la successione $\{p(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{p(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ in Y converge sia a $[(0, 1)]$ che a $[(1, 0)]$, che sono diversi in Y. Dunque Y non è Haudorff perché i limiti non sono unici.

ESERCIZIO 4 (12 punti) Sia Z la retta reale munita della topologia avente per base gli insiemi della forma $S_a := (a, +\infty)$ al variare di $a \in \mathbb{R}$. Dimostrare che:

(i) (4 punti) Z è T_0 e T_4 ma non è né T_1 né T_2 né T_3.
(ii) (4 punti) Z è II numerabile, I numerabile, separabile e Lindelòf.
(iii) (4 punti) Z non è né numerabilmente compatto né compatto per successioni né compatto.

Soluzione:

(i) Osserviamo che se $F \subseteq Z$ è un chiuso e $x \in F$ allora $(-\infty, x] \subseteq F$. Infatti, se $y \leq x$ allora ogni intorno U di y conterrà un aperto della forma $(z, +\infty)$ per qualche $z < y$. In particolare, sicuramente avremo che $x \in U \cap F$; dunque $y \in \overline{F} = F$. Dimostriamo ora le diverse proprietà:
- Z è T_0: siano $x \neq y \in Z$ e supponiamo che $x < y$. Allora $(x, +\infty)$ è un aperto di Z che contiene y ma non x, q.e.d.
- Z è banalmente T_4 siccome dall'osservazione iniziale segue che non esistono chiusi non vuoti e disgiunti di Z.
- Z non è T_1: siano $x \neq y \in Z$ e supponiamo che $x < y$. Allora ogni intorno U di x conterrà qualche elemento della base della forma $(z, +\infty)$ per qualche $z < x$. Dunque U conterrà necessariamente y. Ne segue che Z non è T_1.
- Z non è T_2 perché non è T_1 (ricordiamo che $T_2 \Rightarrow T_1$).
- Z non è T_3 perché è T_0 ma non T_2 (ricordiamo che $T_3 + T_0 \Rightarrow T_2$).

(ii) Osserviamo che per ogni $a \in \mathbb{R}$ vale che

$$(a, +\infty) = \bigcup_{\substack{a<b \\ b\in\mathbb{Q}}} (b, +\infty).$$

Dunque la collezione numerabile degli insiemi della forma $\{(b, +\infty)\}_{b\in\mathbb{Q}}$ costituisce una base della topologia, quindi Z è II numerabile. Tutte le altre proprietà sono implicate da questa.

(iii) Consideriamo il seguente ricoprimento numerabile $\mathcal{U}$ di Z:

$$\mathcal{U} := \{(n, +\infty) \; : \; n \in \mathbb{Z}\}.$$

Chiaramente $\mathcal{U}$ non ammette sottoricorpimenti finiti e dunque Z non è numerabilmente compatto. Ne segue che Z non è né compatto né compatto per successioni perché entrambe queste proprietà implicano la compattezza numerabile.

ESERCIZIO 5 (6 punti) Dimostrare che uno spazio metrico (X, d) totalmente limitato è separabile.

Soluzione: Per ogni intero $n \geq 1$, sia $\mathcal{U}_n$ il ricoprimento aperto di X fatto da tutte le palle di raggio $1/n$. Siccome (X, d) é totalmente limitato per ipotesi, allora $\mathcal{U}_n$ ammette un sottoricoprimento finito $\mathcal{U}'_n := \{B_{1/n}(x_1^n), \cdots, B_{1/n}(x_{k_n}^n)\}$ fatto di k_n palle (per qualche $k_n \in \mathbb{N}$) con centri nei punti $x_i^n \in X$ per $0 \leq i \leq k_n$. Sia S il sottoinsieme di X definito da:

$$S := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_1^n, \cdots, x_{k_n}^n\}.$$

Chiaramente S é un sottoinsieme numerabile di X. Mostreremo che S é anche denso in X, e questo implicherá che X é separabile.

Sia p un punto di X. Dobbiamo mostrare che p appartiene alla chiusura $\overline{S}$ di S. Per dimostrare ció, é sufficiente far vedere che ogni palla $B_{1/n}(p)$ di raggio $1/n$ e centrata in p contiene qualche punto di S (infatti tale palle, al variare di $n \in \mathbb{N}$, formano una base di intorni di p). Siccome $\mathcal{U}'_n$ é un ricoprimento di X, allora esiste un indice $1 \leq i \leq k_n$ tale che $p \in B_{1/n}(x_i^n)$. Allora abbiamo che

$$d(x_i^n, p) < \frac{1}{n},$$

e dunque $x_i^n \in S \cap B_{1/n}(p)$, come volevasi dimostrare.