Tutorato di GE220

AA. 2011-2012
Docente: Prof. Filippo Viviani
Tutore: Martina Patone

22 Febbraio 2012

1. Dimostrare che ognuno delle seguenti é una distanza di $\mathbb{R}^n$:

   (a) $d_1(x,y) = \|x-y\|$;

   (b) $d_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;

   (c) $d_3(x,y) = \max_i\{|x_i - y_i|\}$.

   Dimostrare inoltre che queste distanze sono topologicamente equivalenti.

2. Se (X,d) é spazio metrico si mostri che anche

$$d' = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

   é una metrica in X ed inoltre che tale metrica é topologicamente equivalente a d, cioé entrambe inducono la stessa topologia su X.

3. Per ogni $x \in \mathbb{R}^2$

$$N_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 | |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| < r\}$$

   é un quadrato aperto con diagonali parallele agli assi. Dimostrare che la famiglia

$$D_2 = \{N_r(x) | x \in \mathbb{R}^2, r > 0\}$$

   é una base della topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$.

4. Date le seguenti topologie su $\mathbb{R}$:

   (a) La topologia euclidea

   (b) La topologia cofinita

   (c) La topologia che ha come base $(a,b]$ con a,b$\in \mathbb{R}$ (topologia del limite superiore)

   (d) La topologia che ha come base $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}, x < a\}$

   Determinare per ognuna di queste topologie, quali sono le topologie tra quelle date che la contengono e sono in essa contenute (cioé le piú fini e meno fini).

5. Trovare tutte le topologie su un insieme $X = \{a, b, c\}$ costituito da tre elementi.

6. Dimostrare che se X é uno spazio topologico che contiene un numero finito di punti ognuno dei quali é chiuso allora X é discreto.

7. Sia X un insieme che contiene infiniti elementi con la topologia cofinita. Si dimostri che X non é metrizzabile.

8. . Si consideri lo spazio topologico $S = ([0,1)\backslash\{\frac{1}{2}\}) \cup 3$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}$. Si trovino in S:

   (a) un sottospazio aperto e chiuso;

   (b) un sottospazio aperto ma non chiuso;

   (c) un sottospazio chiuso ma non aperto;

   (d) un sottospazio né aperto né chiuso.

   Si calcoli línterno e la chiusura di S e i suoi punti di accumulazione.