Tutorato di GE220

AA. 2011-2012
Docente: Prof. Filippo Viviani
Tutore: Martina Patone

14 Marzo 2012

1. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione da un insieme X in uno spazio topologico Y con topologia τ. Dimostrare che la famiglia di sottoinsiemi di X: $f^*(\tau) = \{f^{-1}(V) | V \in \tau\}$ é una topologia.
   In particolare é la topologia meno fine per la quale f é continua e si chiama *topologia indotta da f su X*.
   Verificare inoltre che se $\mathcal{B}$ é una base per τ, allora $f^*(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}\}$ é una base per $f^*(\tau)$.

2. Siano date due topologie τ_1 e τ_2 su un insieme X. Provare che l'applicazione identica $f : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$, $f(x) = x$ é continua se e solo se τ_1 é piú fine di τ_2.

3.
   - Dare un esempio di funzione aperta ma non continua e di funzione continua ma non aperta.
   - Dimostrare che $X \simeq Y \Leftrightarrow \exists f : X \to Y$ tale che:
     - f é biettiva;
     - V é aperto in X se e solo se $f(V)$ é aperto in Y.

4. Date due applicazioni $f : X \to X'$ e $g : Y \to Y'$, dimostrare che:
   (a) Se f e g sono continue, allora $F : X \times X' \to Y \times Y'$, $F(x, y) = (f(x), g(y))$ é continua;
   (b) Se f e g sono aperte, allora F é aperta;
   (c) Se f e g sono omeomorfismi, allora F é un omeomorfismo.

5. Dimostrare le seguenti:
   (a) Se X é uno spazio di Hausdorff e $Y \subset X$, allora Y é di Hausdorff.
   (b) Se X e Y sono spazi di Hausdorff allora $X \times Y$ é di Hausdorff.

6. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua. Sia $G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y\}$ il grafico di f. Dimostrare che $G(f) \cong X$.

7. Sia $X = \bigcup A_i$ uno spazio topologico, dove gli A_i sono sottoinsiemi di A. Sia $f : X \to Y$ (Y spazio topologico) con $f|_{A_i}$ continua per ognuno degli A_i. Mostrare che:

(a) Se gli A_i sono chiusi e in numero finito allora f é continua;

(b) Se gli A_i sono aperti allora f é continua.

8. Dimostrare che l'insieme $\mathcal{B} = \{(a,b), (a,b)\backslash K | a,b \in \mathbb{R},\ K = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^+\}\}$ é una base per una topologia τ su $\mathbb{R}$. Dimostrare inoltre che la topologia τ su $\mathbb{R}$ é piú fine di quella euclidea e che $(\mathbb{R}, \tau)$ é uno spazio T_2 ma non T_3.

9. Si consideri su $[0,1]$ la seguente relazione di equivalenza: $x \sim y$ se e solo se $x = y$ oppure $\{x, y\} \in S$, dove $S = \{0, 1\}$. Si dimostri che $[0,1]/\sim_S \cong S^1$

10. Si consideri su $\mathbb{R}$ la seguente relazione di equivalenza: $x \sim y$ se e solo se $x = y$ oppure se $|x| = |y| > 1$. Si dimostri che $\mathbb{R}/\sim$ non é uno spazio di Hausdorff.

11. Sia $f : X \to Y$ una identificazione ed $A \subset X$ un sottoinsieme saturo. Dimostrare che $Int(A)$ e $\bar{A}$ sono saturi.