Tutorato di GE220

AA. 2011-2012
Docente: Prof. Filippo Viviani
Tutore: Martina Patone

21 Marzo 2012

1. Dimostare che:

   (a) se uno spazio é T_2, allora ogni punto é chiuso.

   (b) un sottoinsieme compatto A di uno spazio di Hausdorff X é chiuso.

2. Sia f un'applicazione da uno spazio compatto X in uno spazio di Hausdorff Y. Dimostrare che se f é chiusa.

   f é un omeomorfismo?

   $id : (\mathbb{R}, \text{top discreta}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \text{top euclidea})$ é un omeomorfismo?

3. Sia $X = \mathbb{R}$ e $A = (0, 1)$. X/A é lo spazio $X/\sim$, dove $x \sim x' \Leftrightarrow x = x'$ o $x, x' \in A$. X/A é di Hausdorff?

   Sotto quali condizioni il quoziente di uno spazio di Hausdorff é ancora di Hausdorff?

4. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua. Se $S \subseteq X$ é un sottoinsieme compatto, dimostrare che l'immagine $f(S)$ é compatta.

   S^1 é compatto?

5. Dimostrare che un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ é compatto se e solo se é chiuso e limitato.

6. Si dimostri che X é uno spazio di Hausdorff se e solo se la diagonale $D = \{(x, x)\} \subset X \times X$ é chiusa.

7. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dimostri che il grafico della funzione, cioé l'insieme $G(f) = \{(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$, é compatto se e solo se f è continua.