

## Tutorato di GE220 -Soluzioni-

AA. 2011-2012

Docente: Prof. Filippo Viviani

Tutore: Martina Patone

28 Marzo 2012

1. Mostrare con un esempio che in uno spazio topologico generico, data una successione il suo limite non è unico.

Sia  $X$  uno spazio  $T_2$ . Dimostrare che ogni successione convergente ha limite unico.

In uno spazio metrico ogni successione ha limite unico?.

2. Dimostrare che:

- Ogni spazio metrico soddisfa il primo assioma di numerabilità;
- Ogni spazio metrico separabile è a base numerabile;

3. Si consideri la *retta di Sorgenfrey definita come*  $R_S = (\mathbb{R}, \tau)$  con  $\tau = \{[a, b[ \mid a < b, a, b \in \mathbb{R}\}$ .

- *Dimostrare che la topologia  $\tau$  così definita è più fine della topologia euclidea;*
- *$R_S$  è separabile?;*
- *$R_S$  è primo-numerabile?;*
- *$R_S$  è secondo-numerabile?;*
- *$R_S$  è metrizzabile?;*

4. *Dimostrare che  $A \subseteq X$ , con  $X$  metrico e completo, è chiuso se e solo se è completo rispetto alla metrica indotta.*

5. *Mostrare con un esempio che la completezza di uno spazio metrico non è invariante topologico. (sugg. Si consideri  $\mathbb{R}$  e un suo sottoinsieme aperto)*

6. *Dimostrare che ogni spazio metrico compatto per successioni  $X$  è totalmente limitato.*

7. *Sia  $A \subseteq X$ ,  $X$  spazio metrico.  $A$  è totalmente limitato se e solo se  $\bar{A}$  è totalmente limitato.*