Compattificazione di Alexandroff

Teorema 0.0.1. *Sia X uno spazio topologico, tale che X sia di Hausdorff e localmente compatto $\Leftrightarrow$ Esiste Y spazio topologico tale che:*

1. *X é un sottospazio di Y;*
2. *$Y \setminus X$ consiste in un solo punto, cioé $Y \setminus X = \{\infty\}$;*
3. *Y é compatto e di Hausdorff.*

Inoltre se Y e Y' soddisfano le precedenti condizioni, esiste un omeomorfismo $f : Y \to Y'$ che é l'identitá su X.

Dimostrazione. Inanzitutto dimostriamo l'unicitá dello spazio Y a meno di omeomorfismi. Siano Y e Y' spazi topologici che soddisfano le precedenti proprietá. Siano:

$$Y = X \cup \{p\}$$

$$Y' = X \cup \{q\}$$

Bisogna dimostrare che date le funzioni:

$$h : Y \to Y'$$

$$h(p) = q$$

$$h(x) = x \ \ \forall p \in X$$

e

$$h^{-1} : Y' \to Y$$

$$h^{-1}(q) = p$$

$$h^{-1}(x) = x \ \ \forall p \in X$$

h sia aperta (allora h^{-1} é continua) Sia U un aperto in Y. Si verificano due casi:

- $U \subset X$. Se U é sottoinsieme di X allora $h(U) = U$ che é un aperto di Y'. Infatti, dato un U aperto di Y, U é aperto anche in X con la sua topologia nativa. Dunque $h(U) = U$ é aperto nella topologia nativa di X che stavolta é per'o indotta da Y' e quindi $h(U)$ é aperto in Y'.

- $U \not\subseteq X$. In questo caso, $p \in U$. Sia $C = Y \setminus U$, dunque C 'e chiuso ed essendo Y compatto, allora C é compatto.
  C é un compatto di X, e dato che $C \subset X \subset Y'$, con Y' di Hausdorff, allora C é un chiuso in Y'.
  Allora $U = Y' \subset C$ é aperto e $h(U) = U$ é aperto.

Allora h e h' sono aperte e continue e dunque h é un omeomorfismo.

Dimostriamo ora che lo spazio $Y = X \cup \infty$ sia effettivamente uno spazio topologico.
In Y abbiamo due tipi di aperti:

1. $U \subset X$, cioé gli aperti di X;

2. gli aperti della forma $Y \setminus C$, dove $C \subset X$ é un compatto.

Dunque sia τ la topologia di Y,

$$\tau := \{U \subset Y;\ \ U \subset X \ \text{ o } \ U = Y \setminus C,\ C \subset X, \text{compatto}\}$$

Verifichiamo i tre assiomi della topologia:

1. $\emptyset$ é un aperto di X allora $\emptyset \in \tau$;
   $Y = Y \setminus \emptyset$, $\emptyset \subset X$, compatto, allora $Y \in \tau$.

2. Siano $U_1, U_2 \subset X$ aperti, allora $U_1 \cap U_2 \subset X$, aperto.
   Dunque $U_1 \cap U_2 \in \tau$;
   Siano $C_1, C_2 \subset X$, compatti, allora $Y \setminus C_1 \cap Y \setminus C_2 = Y \setminus (C_1 \cup C_2)$, dove $C_1 \cup C_2$ é un compatto di X. Allora $Y \setminus (C_1 \cup C_2) \in \tau$;
   Sia $U_1 \subset X$, aperto e $U_2 = Y \setminus C$. Allora $U_1 \cap U_2 = U_1 \setminus C = U_1 \cap (X \setminus C) \subset X$. Allora $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

3. $\bigcup_\alpha U_\alpha$, dove U_α sono aperti di X é ancora un aperto di X, allora $\bigcup_\alpha U_\alpha \in \tau$;
   $\bigcup_\alpha (Y \setminus C_\alpha) = Y \setminus \bigcap_\alpha C_\alpha$, ed essendo $\bigcap_\alpha C_\alpha$ un compatto di X, allora $\bigcup_\alpha U_\alpha \in \tau$;
   $\bigcup_\alpha U_\alpha \cup \bigcup_\beta Y \setminus C_\beta = U \cup (Y \setminus C) = Y \setminus (C \setminus U)$, dove $C \setminus U$ é un compatto di X, allora $U \cup (Y \setminus C) \in \tau$.

Verifichiamo che Y induce in X la sua topologia:
Sia $V \subset Y$ aperto, dobbiamo vedere se $V \cap X$ é un aperto di X.

$$V \cap X = \begin{cases} V, & \text{se } V \subset X, \text{ aperto} \\ X \setminus C, \ C \text{ compatto di } X \ , & \text{se } \ V = Y \setminus C \end{cases}$$

Dunque gli aperti di Y inducono su X una topologia che coincide con la sua topologia nativa.

Resta solo da dimostrare che Y é compatto e di Hausdorff. Per verificarne la compattezza, sia dato $(A_\alpha)_\alpha$ un ricoprimento aperto di Y.
Sia $\infty \in A_0 = Y \setminus C$, C compatto di X. Dunque $X \cap A_{alpha}$, con $\alpha \neq 0$ é un ricoprimento aperto di C in X. Essendo C compatto esiste un sottoricoprimento finito tale che:

$$C \subseteq (X \cap A_1) \cup \cdots \cup (X \cap A_n)$$

Quindi abbiao trovato un sottoricoprimento finito di Y, cioé :

$$Y \subseteq (X \cap A_1) \cup \cdots \cup (X \cap A_n) \cup A_0$$

Verifichiamo la proprietá di Hausdorff: Siano dati $x, y \in Y$.
Se $x, y \in X$, allora per ipotesi vale la proprietá di Hausdorff.
Sia $x \in X$ e $y = \infty$. Per ipotesi X é localmente compatto, allora

$$x \in U \subseteq C \subseteq X$$

. Preso dunque $V = Y \setminus C$, U e V sono due aperti disgiunti rispettivamente di x e y, e dunque Y é di Hausdorff.

Per ultimare la dimostrazione verifichiamo l'implicazione inversa:
Sia $X \subset Y = X \cup \{\infty\}$.
Per ipotesi Y é uno spazio di Hausdorff e dunque anche X lo é.
Inoltre dati ∞ e $z \in X$, con $z \neq \infty$, $\exists U$ aperto di z e V aperto di ∞, tali che $U \cap V = \emptyset$.
$\infty \notin U$ allora $U \subset X$.
$\infty \in V$ allora $V = Y \setminus C$, C comptto di X, allora $U \subset C$.
Quindi $x \in U \subset C \subset X$, allora X é localmente compatto.

ESERCIZI:

- Dimostrare che se X non é compatto allora $\bar{X} = Y$.
- Dimostrare che se X é di Hausdorff e localmente compatto (non compatto), allora $Y = X \cup \{\infty\}$ é la compattificazione minimale.