Tutorato di GE220

AA. 2011-2012
Docente: Prof. Filippo Viviani
Tutore: Martina Patone

7 Maggio 2012

1. Sia J un intervallo aperto (limitato o no) di $\mathbb{R}$. Dimostrare che un intervallo J' di $\mathbb{R}$ é omeoemorfo a J se e solo se J é aperto.
2. Dimostrare che S^1 e $I = [0, 1]$ non sono omeomorfi.
3. Dimostrare che $\mathbb{Q}$ non é connesso.
4. Dimostrare che $\mathbb{R}$ non é omeomorfo a $\mathbb{R}^n$, per ogni $n \geq 2$.
5. Dimostrare che se X ha la topologia discreta allora gli unici insiemi connessi sono i punti.
6. Dimostrare che X é connesso se e solo se ogni funzione continua da X ad uno spazio discreto é costante.
7. Dire quali tra questi sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono connessi e connessi per archi:
   - $\{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$;
   - $\{(x, y); x^2 + y^2 > 1\}$;
   - $\{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$;
   - $\{(x, y); x^2 + y^2 \neq 1\}$;
8. Riconoscere quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono sconnessi:
   (a) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0); x \neq 0\}$;
   (b) $B = P \setminus \{(0, y) : y \text{ irrazionale}\}$, dove $P = \{(x, y); -1 \leq x, y \geq 1\}$;
   (c) $C = D_1(1, 0) \cup D_1(-1, 0)$;
   (d) $D = \bar{C}$;
   (e) $E = C \cup \{(0, 0)\}$.
9. Dimostrare che $\forall t \in \mathbb{R}^2$,
   $$X_t = \{(x, y) | xy = t\}$$
   non é omeomorfo a $\mathbb{R}$.
10. Sia $\{A_n\}$ una successione di sottoinsiemi connessi di X tali che $A_n \cup A_{n+1} \neq \emptyset \forall n$. Dimostrare che $\bigcap_n A_n$ é connesso.

11. Sia $\{A_\alpha\}$ una famiglia di sottoinsiemi connessi di X. Sia $A \subset X$ connesso. Mostrare che se $A \cap A_\alpha \neq \emptyset \forall \alpha$, allora $A \cup \{\bigcup_\alpha A_\alpha\}$ é connesso.

12. $\mathbb{R}_l$ é connesso? {l=lower limit topology}

13. Mostrare che se X é infinito, allora X con la topoogia cofinito é connesso.

14. Sia $A \subset X$. Mostrare che se C é un sottoinsieme connesso di X che interseca sia A che $X \setminus A$, allora C interseca $Fr(A)$.

15. Sia $f : X \longrightarrow X$ continua. Mostrare che se $X = [0, 1]$ allora $\exists x \in X$ tale che $f(x) = x$. Cosa succede se $X = (0, 1)$ e $X = [0, 1)$?