Tutorato di GE220

AA. 2011-2012
Docente: Prof. Filippo Viviani
Tutore: Martina Patone

23 Maggio 2012

Spazi Proiettivi

Sia $n \geq 0$. In $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ si consideri la relazione d'equivalenza

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c.} x = \lambda y \forall x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}.$$

Si definisce *spazio proiettivo reale* di dimensione n $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$ e si indica $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$. $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ é la retta proiettiva,
$\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ é il piano proiettiva.

Sia

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$$

$$(x_0 \ldots x_n) \mapsto \pi(x_0, \ldots, x_n) = [x_0, \ldots, x_n] = [\lambda(x_0, \ldots, x_n)]$$

la proiezione canonica. Le coordinate $[x_0, \ldots, x_n]$ si chiamamo *coordinate omogenee* del punto $\pi(x)$ di $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$.

Esempio 0.1 *In $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}/\sim$, i punti sono tutte le direzione di $\mathbb{R}^2$.*

Si considerino di sottoinsiemi di $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$:

$$U_i = \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n | x_i \neq 0\}$$

$\mathbb{R}\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$

Dimostrate che gli U_i sono aperti.

$$\pi^{-1}(U_i) = U_i = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} | x_i \neq 0\}$$

Sia definita la funzione continua $F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ che manda $(x_0, \ldots, x_n)$ in x_i. Allora $\mathcal{C}(\pi^{-1}(U_i)) = F^{-1}(\{0\})$. Essendo $\{0\}$ un chiuso ed F continua, allora $F^{-1}(\{0\})$ é chiuso e dunque $\pi^{-1}(U - i)$ aperto. Allora U_i è aperto.

Dimostrare che $U_i \cong \mathbb{R}^n$, $\forall i$.

Sia $\pi^{-1}(U_i) = U_i'$. La restrizione $\pi : U_i' \longrightarrow U_i$ é ancora una mappa quoziente. Sia $G : U_i' \longrightarrow \mathbb{R}^n$ che mappa $(x_0, \dots, x_n)$ in $(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i})$. G é compatibile con π_i. Cioé

$$F(x_0, \dots x_n) = F(x_=', \dots, x_n') \Leftrightarrow \pi_i(x_0, \dots, x_n) = \pi(x_0', \dots, x_n')$$

. Allora, per la proprietá fondamentale del quoziente esiste ed é unica una funzione $g : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ che é continua. Inoltre g é biettiva e ha inversa continua. ($g^{-1} = i \cdot \pi_i$, dove $i : \mathbb{RP}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ é l'inclusione che mappa $(y_0, \dots y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)$ in $(y_0, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_n)$)
Ció dimostra che $U_i \cong \mathbb{R}^n$.

Sia $H_i = \mathbb{RP}^n \setminus U_i$. Gli H_i si chiamano *iperpiani all'infinito* rispetto a U_i.

Dimostrare che U_i é denso in $\mathbb{RP}^n$.

Per dimostrare che $\bar{U}_i = \mathbb{RP}^n$ basta verificare che se $P \in H_i$, allora $P \in \bar{U}_i$. Sia $P \in H_i$, allora $P = [x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n]$. Sia A un aperto di $\mathbb{RP}^n$, con $P \in A$. Sia $P' = (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, x_n) \in \mathbb{R}^{\ltimes + \Vdash} \setminus \{0\}$, allora $P' \in \pi^{-1}(A)$, aperto di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, dunque $\exists B_r(P') \subseteq \pi^A$. Se $Q \in B_r(P')$, allora $Q = (y_0, \dots, y_n)$ con $y_i \neq 0$. Dato che $\pi(Q) \in A$, allora $A \cap U_i \neq \emptyset$ e $P \in \bar{U}_1$.

Sia $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la sfera unitaria. Possiamo definire su S^{n+1} la seguente relazione d'equivalenza:

$$x \sim y \Leftrightarrow y = \pm x$$

che identifica tra i loro punti antipodali. Lo spazio proiettivo $\mathbb{RP}^n$ é lo spazio rispetto a tale relazione.

$\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ con il prodotto agisce su S^n:

$$\mathbb{Z}_2 \times S^n \longrightarrow S^n$$

$$(-1, x) \mapsto x$$

$$(1, x) \mapsto -x$$

$\forall x \in S^n$. Allora $S^n/\mathbb{Z}_2 = \{x, -x\} = [x] = \mathbb{RP}^n$.

Dimostrare che $\mathbb{RP}^n$ é una varietá topologica.

$\mathbb{RP}^n$ é una varietá topologica se é uno spazio di Hausdorff e se $\forall P \in \mathbb{RP}^n \exists U_P$ aperto di P tale che $U_P \cong \mathbb{R}^n$. Abbiamo giá visto che gli U_i sono aperti di $\mathbb{RP}^n$ sono omeomorfi a $\mathbb{R}^n$. Per dimostrare che $\mathbb{RP}^n$ sia di Hausdorff basta usare la seguente proposizione:

Proposizione 0.2 *Se X é uno G-spazio compatto e di Hausdorff, con G gruppo finito, allora X/G é compatto e di Hausdorff.*

Dalla proposizione segue che $\mathbb{RP}^n$ é di Hausdorff e dunque una varietá topologica.

Sia $p : S^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ la proiezione naturale dalla sfera unitaria di $\mathbb{R}^{n+1}$ sullo spazio proiettivo reale di dimensione n, con $n \geq 2$. p é un rivestimento universale. Per ogni $P \in \mathbb{RP}^n$, $p^{-1}(P)$ consiste di due elementi.

Dato che esiste una corrispondenza biunivoca fra gli insiemi $\pi(X, x_0)$ e $p^{-1}(x_0)$, $\forall x_0 \in X$ quando $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ é un rivestimento universale, ne segue che $pi(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}_2$, quando $n \geq 2$. Per $n = 1$, $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$ allora $\pi(\mathbb{RP}^1) \cong \mathbb{Z}$.

Retratti di deformazione

Sia $A \subset X$, A si dice *retratto di* X se esiste $r : X \longrightarrow A$ continua tale che $r \cdot i = id_A$, dove $i : A \longrightarrow X$ é la mappa inclusione.

r si chiama *retrazione.*

$A \subset X$ é un *retratto di deformazione di* X se esiste $r : X \longrightarrow A$ tale che $i \cdot r \approx id_X$.

In altre parole A é un retratto di deformazione di X se esiste un'omotopia
$F : X \times I \longrightarrow X$ $F(x, 0) = x$
$F(x, 1) \in A$
$\forall x \in X$.

Esempio 0.3 *S' é un retratto di deformazione del cilindro.*

Proposizione 0.4 *Se A é un retratto di deformazione di X, allora A e X sono equivalenze omotopiche.*

Per ognuno dei seguenti spazi, il gruppo fondamentale é o il banale o ciclico infinito ($\mathbb{Z}$), o isomorfo al gruppo fondamentale della figura otto.

1. Il toro solido $B^2 \times S^1$
   Per $(x, y) \in B^2 \times S^1$, l'omotopia
   $$H((x, y), t) = ((1 - t)x, y)$$
   mostra che S^1 é un retratto di deformazione del toro solido, cosi $\pi_1(B^2 \times S^1) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

2. Il cilindro $S^1 \times I$
   $pi_1(C) = \mathbb{Z}$, perché il cilindro ha S^1 come retratto di deformazione dall'omotopia:
   $$H((x, y), t) = (x, (1 - t)y)$$

3. Il cilindro infinito $C = S^1 \times \mathbb{R}$
   $\pi_1(C) = \mathbb{Z}$ come nel precedente.

4. $\{x|||x|| > 1\}$.
   Questo spazio ha $\{x \in \mathbb{R}^2|||x|| = 2\}$ come retratto di deformazione dall'omotopia
   $$H(x, t) = (1 - t)x + 2t\frac{x}{||x||}$$
   $\{x \in \mathbb{R}^2|||x|| = 2\}$ é omeomorfo a S^1 da $x \mapsto \frac{x}{2}$ allora $\pi_1(4)\mathbb{Z}$

5. $\{x|||x|| \geq 1\}$.
   Questo spazio ha S^1 come retratto di deformazione dall'omologia
   $$H(x, t) = (1 - t)x + t\frac{x}{||x||}$$
   allora $\pi_1(5) = \mathbb{Z}$.

6. {x | ||x|| < 1}.
   Dall'omotopia
$$H(x,t) = (1-t)x + t\frac{x}{||x||}.$$
   $\pi_1(6) = \emptyset$.

7. $S^1 \cup (\mathbb{R}_+ \times 0)$
   $\pi_(7) = \mathbb{Z}$.

8. $S^1 \cup (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$
   $\pi_(8) = \mathbb{Z}$.

9. $S^1 \cup (\mathbb{R}_+ \times 0)$
   Dall'omotopia
$$H(x,t) = x, \text{se } ||x|| \leq 1$$
$$H(x,t) = (1-t)x + t\frac{x}{||x||}, \text{se } ||x|| > 1$$
   Si ottiene lo spazio theta. Questo ha il gruppo fondamentale dello spazio a figura otto, essendo entrambi retratti del piano con due buchi.

10. $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times 0)$
    Dall'omotopia
$$H(x,t) = (1-t)x + t(-1,0)$$
    $\pi_1(10)$ é banale.