Nome candidato:

I APPELLO DEL CORSO
MATEMATICA PER INGEGNERIA ELETTRONICA
27 GENNAIO 2021

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (8 punti)
Sia V_1 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - X_3 - X_4 = 0, \\ X_2 - X_4 = 0, \\ X_1 + X_2 - X_3 - 2X_4 = 0, \\ X_1 - X_2 - X_3 = 0, \end{cases}$$

e sia V_2 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$V_2 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(A) Determinare una base di V_1 e calcolare la sua dimensione.
(B) Determinare una base di V_2 e calcolare la sua dimensione.
(C) Scrivere $V_1 + V_2$ in forma cartesiana e calcolare la sua dimensione.
(D) Calcolare la dimensione di $V_1 \cap V_2$ usando la formula di Grassmann, e trovare una sua base.

ESERCIZIO 2 (8 punti)
Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

(A) Determinare una base dell'immagine $\mathrm{Im}(f)$ e calcolare la sua dimensione.
(B) Calcolare la dimensione del nucleo $\ker(f)$ usando il teorema di rango-nullità e trovare una sua base.
(C) Mostrare che il sistema di vettori

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

è una base di $\mathbb{R}^3$ e calcolare le matrici di cambiamento di base $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ e $M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$, dove $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(D) Calcolare la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

ESERCIZIO 3 (6 punti)

Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(A) Calcolare gli autovalori di g.
(B) Per ciascun autovalore di g, calcolare una base dell'autospazio corrispondente.
(C) Dire se g è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base $\mathcal{C}$ diagonalizzante e scrivere $M_{\mathcal{C}}(g)$.

ESERCIZIO 4 (8 punti)
In $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard, si consideri il seguente operatore

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x_1 - x_3 \\ -2x_2 \\ -x_1 - x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(A) Calcolare gli autovalori di h.
(B) Per ciascun autovalore di h, calcolare una base dell'autospazio corrispondente.
(C) Dire se h è ortonormalmente diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base $\mathcal{D}$ ortonormale diagonalizzante e scrivere $M_{\mathcal{D}}(h)$.

ESERCIZIO 5 (10 punti)
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa. Se è vera fornire una dimostrazione, se è falsa fornire un controesempio.
(A) Siano A, B, C tre matrici quadrate dello stesso ordine. Se $AB = AC$, allora $B = C$.
(B) Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ un'operatore invertibile e diagonalizzabile. Allora l'operatore inverso f^{-1} è diagonalizzabile.
(C) Esistono due sottospazi di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 la cui intersezione è il sottospazio vettoriale nullo $\{\overline{0}\}$.
(D) Sia $A \in M_{n \times n}$ la matrice dei coefficienti di un sistema lineare S. Se A non è invertibile, allora S non ha soluzioni.