

Nome candidato:

**I APPELLO DEL CORSO
MATEMATICA PER INGEGNERIA ELETTRONICA
27 GENNAIO 2021**

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (8 punti)

Sia V_1 il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 definito da

$$V_1 = \text{Lin} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

e V_2 il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - X_2 - X_4 = 0, \\ X_1 + X_3 = 0, \\ 2X_1 - X_2 + X_3 - X_4 = 0, \\ X_2 - X_3 - X_4 = 0, \end{cases}$$

- (A) Determinare una base di V_1 e calcolare la sua dimensione.
- (B) Determinare una base di V_2 e calcolare la sua dimensione.
- (C) Scrivere $V_1 + V_2$ in forma cartesiana e calcolare la sua dimensione.
- (D) Calcolare la dimensione di $V_1 \cap V_2$ usando la formula di Grassmann, e trovare una sua base.

ESERCIZIO 2 (8 punti)

Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

- (A) Determinare una base dell'immagine $\text{Im}(f)$ e calcolare la sua dimensione.
- (B) Calcolare la dimensione del nucleo $\ker(f)$ usando il teorema di rango-nullità e trovare una sua base.
- (C) Mostrare che il sistema di vettori

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

è una base di \mathbb{R}^3 e calcolare le matrici di cambiamento di base $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ e $M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$, dove \mathcal{E} è la base canonica di \mathbb{R}^3 .

- (D) Calcolare la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

ESERCIZIO 3 (6 punti)

Si consideri l'applicazione lineare

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

- (A) Calcolare gli autovalori di g .
- (B) Per ciascun autovalore di g , calcolare una base dell'autospazio corrispondente.
- (C) Dire se g è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base \mathcal{C} diagonalizzante e scrivere $M_{\mathcal{C}}(g)$.

ESERCIZIO 4 (8 punti)

In \mathbb{R}^3 munito del prodotto scalare standard, si consideri il seguente operatore

$$h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ 2x_2 \\ -x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

- (A) Calcolare gli autovalori di h .
- (B) Per ciascun autovalore di h , calcolare una base dell'autospazio corrispondente.
- (C) Dire se h è ortonormalmente diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base \mathcal{D} ortonormale diagonalizzante e scrivere $M_{\mathcal{D}}(h)$.

ESERCIZIO 5 (10 punti)

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa. Se è vera fornire una dimostrazione, se è falsa fornire un controesempio.

- (A) Siano A, B, C tre matrici quadrate dello stesso ordine con A invertibile. Se $AB = AC$, allora $B = C$.
- (B) Sia $f \in \text{End}(V)$ un operatore diagonalizzabile. Allora f è invertibile.
- (C) La somma di due sottospazi distinti di \mathbb{R}^3 di dimensione 2 è uguale a \mathbb{R}^3 .
- (D) Il rango di un prodotto di matrici è uguale al prodotto dei loro ranghi.