Nome candidato:

II APPELLO DEL CORSO
MATEMATICA PER INGEGNERIA ELETTRONICA
15 FEBBRAIO 2021

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (8 punti)
Sia V_1 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$V_1 = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right),$$

e sia V_2 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - X_4 = 0, \\ X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = 0, \\ X_2 - X_3 = 0, \\ 2X_1 + X_2 - X_3 - 2X_4 = 0. \end{cases}$$

(A) Scrivere V_1 in forma cartesiana e determinare una sua base.
(B) Scrivere V_2 in forma parametrica e determinare una sua base.
(C) Scrivere $V_1 + V_2$ in forma cartesiana e determinare una sua base.
(D) Calcolare la dimensione di $V_1 \cap V_2$ usando la formula di Grassmann, e determinare una sua base.

ESERCIZIO 2 (8 punti)
Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x_1 + x_2 - x_4\\x_2 - x_3 + x_4\\x_1 + 2x_2 - x_3\end{pmatrix}.$$

(A) Determinare una base dell'immagine $\text{Im}(f)$ e calcolare la sua dimensione.
(B) Calcolare la dimensione del nucleo $\ker(f)$ usando il teorema di rango-nullità e trovare una sua base.
(C) Mostrare che

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^4$ e calcolare la matrice di cambiamento di base $M_{\mathcal{D},\mathcal{B}}$, dove $\mathcal{D}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.
(D) Mostrare che

$$\mathcal{C} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$ e calcolare la matrice di cambiamento di base $M_{\mathcal{C},\mathcal{E}}$, dove $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(E) Calcolare la matrice $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$.

ESERCIZIO 3 (8 punti)

Si consideri l'applicazione lineare

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ -x_2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(A) Calcolare gli autovalori di g e la moro molteplicità algebrica.

(B) Per ciascun autovalore di g, calcolare una base dell'autospazio corrispondente e dire qual'è la loro molteplicità geometrica.

(C) Dire se g è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base $\mathcal{B}$ diagonalizzante per g e scrivere $M_{\mathcal{B}}(g)$.

(D) Dire se g è ortonormalmente diagonalizzabile nello spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle_{\mathrm{st}})$ e, in caso affermativo, trovare una base $\mathcal{C}$ ortonormale diagonalizzante per g e scrivere $M_{\mathcal{C}}(g)$.

ESERCIZIO 4 (8 punti)

In $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard $\langle -, - \rangle_{\mathrm{st}}$, si consideri il seguente operatore

$$h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

(A) Calcolare gli autovalori di h e la loro molteplicità algebrica.

(B) Per ciascun autovalore di h, calcolare una base dell'autospazio corrispondente.

(C) Dire se h è ortonormalmente diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base $\mathcal{D}$ ortonormale diagonalizzante e scrivere $M_{\mathcal{D}}(h)$.

ESERCIZIO 5 (10 punti)

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa. Se è vera fornire una dimostrazione, se è falsa fornire un controesempio.

(A) Siano $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ tre vettori di $\mathbb{R}^3$ tali che $\overline{v}_3 \notin \mathrm{Lin}\,(\overline{v}_1, \overline{v}_2)$. Allora $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

(B) Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ un'operatore tale che esiste una base $\mathcal{B}$ di V con la proprietà che $M_{\mathcal{B}}(f)$ è triangolare superiore con elementi a due a due distinti sulla diagonale. Allora f è diagonalizzabile.

(C) Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ un'operatore invertibile. Allora uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di f se e solo se λ^{-1} è un autovalore di f^{-1}.

(D) Sia A una matrice quadrata tale che $A^2 = A$. Allora i possibili autovalori di A sono 0 e 1.