Nome candidato:

III APPELLO DEL CORSO
MATEMATICA PER INGEGNERIA ELETTRONICA
28 GIUGNO 2021

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (8 punti)
Sia V_1 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$V_1 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

e sia V_2 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 0, \\ X_2 - X_4 = 0, \\ X_1 - X_3 + X_4 = 0, \\ X_1 + 2X_2 - X_3 - X_4 = 0, \end{cases}$$

(A) Scrivere V_1 in forma cartesiana e determinare una sua base.
(B) Determinare una base di V_2 e calcolare la sua dimensione.
(C) Scrivere $V_1 + V_2$ in forma cartesiana e determinare una sua base.
(D) Calcolare la dimensione di $V_1 \cap V_2$ usando la formula di Grassmann, e determinare una sua base.

ESERCIZIO 2 (8 punti)
Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

(A) Determinare una base del nucleo $\ker(f)$.
(B) Calcolare la dimensione dell'immagine $\mathrm{Im}(f)$ usando il teorema di rango-nullità e trovare una sua base.
(C) Mostrare che

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$ e calcolare le matrici di cambiamento di base $M_{\mathcal{D},\mathcal{B}}$ e $M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$, dove $\mathcal{D}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(D) Mostrare che

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^4$ e calcolare le matrici di cambiamento di base $M_{\mathcal{E},\mathcal{C}}$ e $M_{\mathcal{C},\mathcal{E}}$, dove $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(E) Calcolare le matrici $M_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(f)$ e $M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f)$.

ESERCIZIO 3 (8 punti)
Si consideri l'applicazione lineare

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ 6x_1 - 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}.$$

(A) Calcolare gli autovalori di g e la moro molteplicità algebrica.
(B) Per ciascun autovalore di g, calcolare una base dell'autospazio corrispondente e dire qual'è la sua molteplicità geometrica.
(C) Dire se g è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base $\mathcal{B}$ diagonalizzante per g e scrivere $M_{\mathcal{B}}(g)$.
(D) Dire se g è ortonormalmente diagonalizzabile nello spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^3, \langle -,- \rangle_{\mathrm{st}})$ e, in caso affermativo, trovare una base $\mathcal{C}$ ortonormale diagonalizzante per g e scrivere $M_{\mathcal{C}}(g)$.

ESERCIZIO 4 (8 punti)
In $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare standard $\langle -,- \rangle_{\mathrm{st}}$, si consideri il seguente operatore

$$h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

(A) Calcolare gli autovalori di h e la loro molteplicità algebrica.
(B) Per ciascun autovalore di h, calcolare una base dell'autospazio corrispondente.
(C) Dire se h è ortonormalmente diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base $\mathcal{D}$ ortonormale diagonalizzante e scrivere $M_{\mathcal{D}}(h)$.

ESERCIZIO 5 (10 punti)
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa. Se è vera fornire una dimostrazione, se è falsa fornire un controesempio.

(A) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Sia $f : V \to V$ un operatore lineare il cui nucleo ha dimensione $n-1$ e che ha un autovalore diverso da zero. Allora f è diagonalizzabile.
(B) Sia A una matrice quadrata. Se A diagonalizzabile allora A^k diagonalizzabile per ogni $k \geq 1$.
(C) Sia $A \in M_n$ una matrice diagonalizzabile che ha 1 come unico autovalore. Allora A è la matrice identità di ordine n.
(D) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operatore lineare il cui polinomio caratteristico è $(x-1)^2(x+1)$. Allora f è suriettivo.
(E) Siano V e W due spazi vettoriali tali che $\dim V = 5$ e $\dim W = 3$. Allora il nucleo di ogni applicazione lineare $f : V \to W$ ha dimensione 2.