

Nome candidato:

IV APPELLO DEL CORSO
MATEMATICA PER INGEGNERIA ELETTRONICA
21 LUGLIO 2021

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (8 punti)

Sia V_1 il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^5 formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - X_3 + X_5 = 0, \\ X_2 - X_4 = 0, \\ X_1 + X_2 - X_3 - X_4 + X_5 = 0, \end{cases}$$

e sia V_2 il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^5 definito da

$$V_2 = \text{Lin} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

- (A) Scrivere V_1 in forma parametrica e determinare una sua base.
- (B) Determinare una base di V_2 e calcolare la sua dimensione.
- (C) Scrivere $V_1 + V_2$ in forma cartesiana e determinare una sua base.
- (D) Calcolare la dimensione di $V_1 \cap V_2$ usando la formula di Grassmann, e determinare una sua base.

ESERCIZIO 2 (8 punti)

Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - x_4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

- (A) Calcolare il rango di f e determinare una base dell'immagine $\text{Im}(f)$.
- (B) Calcolare la dimensione del nucleo $\ker(f)$ usando il teorema di rango-nullità e trovare una sua base.
- (C) Mostrare che

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di \mathbb{R}^4 e calcolare le matrici di cambiamento di base $M_{\mathcal{E},\mathcal{C}}$ e $M_{\mathcal{C},\mathcal{E}}$, dove \mathcal{E} è la base canonica di \mathbb{R}^4 .

- (D) Calcolare le matrici $M_{\mathcal{E},\mathcal{C}}(f)$, $M_{\mathcal{C},\mathcal{E}}(f)$ e $M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f)$.

ESERCIZIO 3 (8 punti)

Si consideri l'applicazione lineare

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

- (A) Calcolare gli autovalori di g e la loro molteplicità algebrica.
- (B) Per ciascun autovalore di g , calcolare una base dell'autospazio corrispondente e dire qual'è la sua molteplicità geometrica.
- (C) Dire se g è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base \mathcal{B} diagonalizzante per g e scrivere $M_{\mathcal{B}}(g)$.
- (D) Dire se g è ortonormalmente diagonalizzabile nello spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle_{\text{st}})$ e, in caso affermativo, trovare una base \mathcal{C} ortonormale diagonalizzante per g e scrivere $M_{\mathcal{C}}(g)$.

ESERCIZIO 4 (8 punti)

In \mathbb{R}^3 munito del prodotto scalare standard $\langle -, - \rangle_{\text{st}}$, si consideri il seguente operatore

$$h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

- (A) Calcolare gli autovalori di h e la loro molteplicità algebrica.
- (B) Per ciascun autovalore di h , calcolare una base dell'autospazio corrispondente.
- (C) Dire se h è ortonormalmente diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base \mathcal{D} ortonormale diagonalizzante e scrivere $M_{\mathcal{D}}(h)$.

ESERCIZIO 5 (10 punti)

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa. Se è vera fornire una dimostrazione, se è falsa fornire un controesempio.

- (A) Sia $A \in M_n$ una matrice quadrata tale che $A^k = I$ per qualche intero $k \geq 1$. Allora A è invertibile.
- (B) Sia $f : V \rightarrow V$ un operatore lineare. Allora la somma di due autovettori di f è ancora un autovettore di f .
- (C) Sia $A \in M_2$ tale che $AB = BA$ per ogni $B \in M_2$. Allora A è un multiplo della matrice identità.
- (D) Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un operatore lineare il cui polinomio caratteristico è $P_f(X) = X^2 + X$. Allora f non è iniettivo.
- (E) Date due matrici $A, B \in M_n$, vale che $\text{rg}(AB) = \text{rg}(A) \cdot \text{rg}(B)$.