

Nome candidato:

**V APPELLO DEL CORSO  
MATEMATICA PER INGEGNERIA ELETTRONICA  
13 SETTEMBRE 2021**

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

**ESERCIZIO 1** (8 punti)

Sia  $V_1$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^4$  definito da

$$V_1 = \text{Lin} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

e sia  $V_2$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^4$  formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 0, \\ X_2 - X_4 = 0, \\ X_1 - X_3 + X_4 = 0, \\ X_1 + 2X_2 - X_3 - X_4 = 0, \end{cases}$$

- (A) Scrivere  $V_1$  in forma cartesiana e determinare una sua base.
- (B) Determinare una base di  $V_2$  e calcolare la sua dimensione.
- (C) Scrivere  $V_1 + V_2$  in forma cartesiana e determinare una sua base.
- (D) Calcolare la dimensione di  $V_1 \cap V_2$  usando la formula di Grassmann, e determinare una sua base.

**ESERCIZIO 2** (8 punti)

Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

- (A) Determinare una base del nucleo  $\ker(f)$ .
- (B) Calcolare la dimensione dell'immagine  $\text{Im}(f)$  usando il teorema di rango-nullità e trovare una sua base.
- (C) Mostrare che

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di  $\mathbb{R}^3$  e calcolare le matrici di cambiamento di base  $M_{\mathcal{D},\mathcal{B}}$  e  $M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$ , dove  $\mathcal{D}$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .

- (D) Mostrare che

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di  $\mathbb{R}^4$  e calcolare le matrici di cambiamento di base  $M_{\mathcal{E},\mathcal{C}}$  e  $M_{\mathcal{C},\mathcal{E}}$ , dove  $\mathcal{E}$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^4$ .

(E) Calcolare le matrici  $M_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(f)$  e  $M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f)$ .

**ESERCIZIO 3** (8 punti)

Si consideri l'applicazione lineare

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ 6x_1 - 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}.$$

- (A) Calcolare gli autovalori di  $g$  e la loro molteplicità algebrica.
- (B) Per ciascun autovalore di  $g$ , calcolare una base dell'autospazio corrispondente e dire qual'è la sua molteplicità geometrica.
- (C) Dire se  $g$  è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base  $\mathcal{B}$  diagonalizzante per  $g$  e scrivere  $M_{\mathcal{B}}(g)$ .
- (D) Dire se  $g$  è ortonormalmente diagonalizzabile nello spazio vettoriale euclideo  $(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle_{\text{st}})$  e, in caso affermativo, trovare una base  $\mathcal{C}$  ortonormale diagonalizzante per  $g$  e scrivere  $M_{\mathcal{C}}(g)$ .

**ESERCIZIO 4** (8 punti)

In  $\mathbb{R}^3$  munito del prodotto scalare standard  $\langle -, - \rangle_{\text{st}}$ , si consideri il seguente operatore

$$h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

- (A) Calcolare gli autovalori di  $h$  e la loro molteplicità algebrica.
- (B) Per ciascun autovalore di  $h$ , calcolare una base dell'autospazio corrispondente.
- (C) Dire se  $h$  è ortonormalmente diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base  $\mathcal{D}$  ortonormale diagonalizzante e scrivere  $M_{\mathcal{D}}(h)$ .

**ESERCIZIO 5** (10 punti)

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa. Se è vera fornire una dimostrazione, se è falsa fornire un controesempio.

- (A) Esistono due sottospazi di  $\mathbb{R}^3$  di dimensione 2 la cui intersezione è il sottospazio nullo.
- (B) Ogni matrice triangolare superiore è diagonalizzabile.
- (C) Se  $A$  è una matrice quadrata invertibile tale che  $A^2 = 0$ , allora  $\det A = 0$ .
- (D) Il rango di un prodotto di matrici quadrate di ordine  $n$  è uguale al prodotto dei loro ranghi.
- (E) Due matrici diagonali  $A$  e  $B$  dello stesso ordine commutano sempre (cioè  $AB = BA$ ).
- (F) Una matrice che abbia due righe una multipla dell'altra non è mai invertibile.
- (G) Data una qualsiasi matrice  $A$ , esiste sempre il prodotto  $A^2 := AA$ .
- (H) Il prodotto  $A \cdot B$  di due matrici simmetriche  $A$  e  $B$  dello stesso ordine è una matrice simmetrica se e solo se  $A$  e  $B$  commutano.
- (I) Sia  $A$  una matrice quadrata. Se  $A \neq 0$ , allora  $A^2 \neq 0$ .
- (J) Sia  $A$  una matrice la cui prima riga è nulla. Il prodotto  $AB$ , se definito, ha la prima riga nulla qualsiasi sia la matrice  $B$ .
- (K) Il prodotto di due matrici invertibili è ancora invertibile.
- (L) Siano  $A, B, C$  tre matrici quadrate. Se  $AB = AC$ , allora  $B = C$ .

(M) Siano  $A, B, C$  tre matrici quadrate con  $A$  invertibile. Se  $AB = AC$ , allora  $B = C$ .