

Nome candidato:

**VII APPELLO DEL CORSO  
MATEMATICA PER INGEGNERIA ELETTRONICA  
17 FEBBRAIO 2022**

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

**ESERCIZIO 1** (8 punti)

Sia  $V_1$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^4$  definito da

$$V_1 = \text{Lin} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

e sia  $V_2$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^4$  formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 = 0, \\ X_1 + X_4 = 0, \\ -X_2 + X_3 - X_4 = 0, \\ 2X_1 - X_2 + X_3 + X_4 = 0. \end{cases}$$

- (A) Determinare una base di  $V_1$  e scrivere  $V_1$  in forma cartesiana.
- (B) Determinare una base di  $V_2$  e calcolare la sua dimensione.
- (C) Scrivere  $V_1 + V_2$  in forma cartesiana e determinare una sua base.
- (D) Calcolare la dimensione di  $V_1 \cap V_2$  usando la formula di Grassmann, e determinare una sua base.

**ESERCIZIO 2** (8 punti)

Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ 2x_1 - 2x_4 \end{pmatrix}.$$

- (A) Determinare una base del nucleo  $\ker(f)$ .
- (B) Calcolare la dimensione dell'immagine  $\text{Im}(f)$  usando il teorema di rango-nullità.
- (C) Mostrare che

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di  $\mathbb{R}^3$  e calcolare le matrici di cambiamento di base  $M_{\mathcal{D},\mathcal{B}}$  e  $M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$ , dove  $\mathcal{D}$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .

- (D) Mostrare che

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di  $\mathbb{R}^4$  e calcolare le matrici di cambiamento di base  $M_{\mathcal{E},\mathcal{C}}$  e  $M_{\mathcal{C},\mathcal{E}}$ , dove  $\mathcal{E}$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^4$ .

(E) Calcolare le matrici  $M_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(f)$  e  $M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f)$ .

**ESERCIZIO 3** (8 punti)

Si consideri l'applicazione lineare

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - 2x_3 \\ x_1 - 2x_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

- (A) Calcolare gli autovalori di  $g$  e la loro molteplicità algebrica.
- (B) Per ciascun autovalore di  $g$ , calcolare una base dell'autospazio corrispondente e dire qual'è la sua molteplicità geometrica.
- (C) Dire se  $g$  è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base  $\mathcal{B}$  diagonalizzante per  $g$  e scrivere  $M_{\mathcal{B}}(g)$ .
- (D) Dire se  $M(g)$  è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una matrice invertibile  $P \in M_3$  tale che  $P \cdot M(g) \cdot P^{-1}$  è diagonale.

**ESERCIZIO 4** (8 punti)

In  $\mathbb{R}^3$  munito del prodotto scalare standard  $\langle -, - \rangle_{\text{st}}$ , si consideri il seguente operatore

$$h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_3 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

- (A) Calcolare gli autovalori di  $h$  e la loro molteplicità algebrica.
- (B) Per ciascun autovalore di  $h$ , calcolare una base dell'autospazio corrispondente.
- (C) Dire se  $h$  è ortonormalmente diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base  $\mathcal{D}$  ortonormale diagonalizzante e scrivere  $M_{\mathcal{D}}(h)$ .

**ESERCIZIO 5** (8 punti)

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa. Se è vera fornire una dimostrazione, se è falsa fornire un controesempio.

- (A) Date due matrici  $A, B \in M_n$ , vale che  $\text{rg}(AB) = \text{rg}(A) \cdot \text{rg}(B)$ .
- (B) La somma di due sottospazi distinti di  $\mathbb{R}^4$  di dimensione 2 è sempre uguale a  $\mathbb{R}^4$ .
- (C) Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un operatore lineare il cui polinomio caratteristico è  $(x+1)^2(x-1)$ . Allora  $f$  è suriettivo.
- (D) Sia  $f \in \text{End}(V)$  un operatore invertibile e diagonalizzabile. Allora l'operatore inverso  $f^{-1}$  è diagonalizzabile.