

FOGLIO DI ESERCIZI 7: AUTOVALORI, AUTOSPAZI E DIAGONALIZZAZIONE DI OPERATORI LINEARI

ESERCIZIO 1

Si consideri il seguente operatore lineare

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

- (A) Calcolare il polinomio caratteristico di f .
- (B) Calcolare gli autovalori di f e la loro molteplicità algebrica.
- (C) Per ciascun autovalore, calcolare l'autospazio corrispondente fornendone una base e dire qual'è la sua molteplicità geometrica.
- (D) Si dica se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determini una base diagonalizzante e si scriva la matrice di f rispetto ad una tale base.
- (E) Trovare una matrice P tale che $P \cdot M(f) \cdot P^{-1}$ è diagonale.

ESERCIZIO 2

Si consideri il seguente operatore lineare

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$$

- (A) Calcolare il polinomio caratteristico di f .
- (B) Calcolare gli autovalori di f e la loro molteplicità algebrica.
- (C) Per ciascun autovalore, calcolare l'autospazio corrispondente fornendone una base e dire qual'è la sua molteplicità geometrica.
- (D) Si dica se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determini una base diagonalizzante e si scriva la matrice di f rispetto ad una tale base.
- (E) Trovare una matrice P tale che $P \cdot M(f) \cdot P^{-1}$ è diagonale.

ESERCIZIO 3

Si consideri il seguente operatore lineare

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 + 4x_2 \\ -x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

- (A) Calcolare il polinomio caratteristico di f .
- (B) Calcolare gli autovalori di f e la loro molteplicità algebrica.
- (C) Per ciascun autovalore, calcolare l'autospazio corrispondente fornendone una base e dire qual'è la sua molteplicità geometrica.
- (D) Si dica se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determini una base diagonalizzante e si scriva la matrice di f rispetto ad una tale base.
- (E) Trovare una matrice P tale che $P \cdot M(f) \cdot P^{-1}$ è diagonale.

ESERCIZIO 4

Si consideri il seguente operatore lineare

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3x_1 + 5x_2 \\ -2x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

- (A) Calcolare il polinomio caratteristico di f .
- (B) Calcolare gli autovalori di f e la loro molteplicità algebrica.
- (C) Per ciascun autovalore, calcolare l'autospazio corrispondente fornendone una base e dire qual'è la sua molteplicità geometrica.
- (D) Si dica se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determini una base diagonalizzante e si scriva la matrice di f rispetto ad una tale base.
- (E) Trovare una matrice P tale che $P \cdot M(f) \cdot P^{-1}$ è diagonale.

ESERCIZIO 5

Si consideri il seguente operatore lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

- (A) Calcolare il polinomio caratteristico di f .
- (B) Calcolare gli autovalori di f e la loro molteplicità algebrica.
- (C) Per ciascun autovalore, calcolare l'autospazio corrispondente fornendone una base e dire qual'è la sua molteplicità geometrica.
- (D) Si dica se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determini una base diagonalizzante e si scriva la matrice di f rispetto ad una tale base.
- (E) Trovare una matrice P tale che $P \cdot M(f) \cdot P^{-1}$ è diagonale.

ESERCIZIO 6

Si consideri il seguente operatore lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 + 5x_2 - 9x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 \end{pmatrix}$$

- (A) Calcolare il polinomio caratteristico di f .
- (B) Calcolare gli autovalori di f e la loro molteplicità algebrica.
- (C) Per ciascun autovalore, calcolare l'autospazio corrispondente fornendone una base e dire qual'è la sua molteplicità geometrica.
- (D) Si dica se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determini una base diagonalizzante e si scriva la matrice di f rispetto ad una tale base.
- (E) Trovare una matrice P tale che $P \cdot M(f) \cdot P^{-1}$ è diagonale.

ESERCIZIO 7

Si consideri il seguente operatore lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 + 4x_2 - 8x_3 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

- (A) Calcolare il polinomio caratteristico di f .
- (B) Calcolare gli autovalori di f e la loro molteplicità algebrica.
- (C) Per ciascun autovalore, calcolare l'autospazio corrispondente fornendone una base e dire qual'è la sua molteplicità geometrica.
- (D) Si dica se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determini una base diagonalizzante e si scriva la matrice di f rispetto ad una tale base.
- (E) Trovare una matrice P tale che $P \cdot M(f) \cdot P^{-1}$ è diagonale.

ESERCIZIO 8

Si consideri il seguente operatore lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 + 2x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

- (A) Calcolare il polinomio caratteristico di f .
- (B) Calcolare gli autovalori di f e la loro molteplicità algebrica.
- (C) Per ciascun autovalore, calcolare l'autospazio corrispondente fornendone una base e dire qual'è la sua molteplicità geometrica.
- (D) Si dica se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determini una base diagonalizzante e si scriva la matrice di f rispetto ad una tale base.
- (E) Trovare una matrice P tale che $P \cdot M(f) \cdot P^{-1}$ è diagonale.

ESERCIZIO 9

Si consideri il seguente operatore lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 + 4x_2 - 8x_3 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 \end{pmatrix}$$

- (A) Calcolare il polinomio caratteristico di f .
- (B) Calcolare gli autovalori di f e la loro molteplicità algebrica.
- (C) Per ciascun autovalore, calcolare l'autospazio corrispondente fornendone una base e dire qual'è la sua molteplicità geometrica.
- (D) Si dica se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determini una base diagonalizzante e si scriva la matrice di f rispetto ad una tale base.
- (E) Trovare una matrice P tale che $P \cdot M(f) \cdot P^{-1}$ è diagonale.

ESERCIZIO 10

Si consideri il seguente operatore lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 \\ -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 \\ -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 \end{pmatrix}$$

- (A) Calcolare il polinomio caratteristico di f .
- (B) Calcolare gli autovalori di f e la loro molteplicità algebrica.
- (C) Per ciascun autovalore, calcolare l'autospazio corrispondente fornendone una base e dire qual'è la sua molteplicità geometrica.

- (D) Si dica se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determini una base diagonalizzante e si scriva la matrice di f rispetto ad una tale base.
- (E) Trovare una matrice P tale che $P \cdot M(f) \cdot P^{-1}$ è diagonale.

ESERCIZIO 11

Si consideri il seguente operatore lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 \\ -2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

- (A) Calcolare il polinomio caratteristico di f .
- (B) Calcolare gli autovalori di f e la loro molteplicità algebrica.
- (C) Per ciascun autovalore, calcolare l'autospazio corrispondente fornendone una base e dire qual'è la sua molteplicità geometrica.
- (D) Si dica se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determini una base diagonalizzante e si scriva la matrice di f rispetto ad una tale base.
- (E) Trovare una matrice P tale che $P \cdot M(f) \cdot P^{-1}$ è diagonale.