FOGLIO DI ESERCIZI 8: BASI ORTONORMALI

ESERCIZIO 1

Controllare che i seguenti sistemi di vettori formano una base dello spazio vettoriale euclideo in questione e applicare loro il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

(A) $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ in $(\mathbb{R}^2, \langle -, - \rangle_{\mathrm{st}})$.

(B) $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ in $(\mathbb{R}^3, \langle -, - \rangle_{\mathrm{st}})$.

(C) $\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ in $(\mathbb{R}^4, \langle -, - \rangle_{\mathrm{st}})$.

ESERCIZIO 2

Per ciascuno dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dati in forma cartesiana, si determini prima una base e poi, utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, si trovi una base ortonormale rispetto alla restrizione del prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^4$.

(A) $W_1 : \{X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = 0$

(B) $W_2 : \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = 0 \\ X_1 - X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$

(C) $W_3 : \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = 0 \\ X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 + 2X_2 = 0 \end{cases}$

ESERCIZIO 3

Per ciascuno dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$ dati in forma parametrica, si determini prima una base e poi, utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, si trovi una base ortonormale rispetto alla restrizione del prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^3$.

(A) $U_1 = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

(B) $U_2 = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.

(C) $U_3 = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

(D) $U_4 = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$.

(E) $U_5 = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$.