FOGLIO DI ESERCIZI 8: TEOREMA SPETTRALE

ESERCIZIO 1

Per ciascuno dei seguenti operatori definiti su uno spazio vettoriale numerico munito del prodotto scalare standard, si dimostri che l'operatore è autoaggiunto e, in caso affermativo, si calcoli una base ortonormale diagonalizzante e si scriva la matrice dell'operatore rispetto a tale base.

(A)

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

(B)

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(C)

$$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ -x_1 + 3x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(D)

$$f_4 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

(E)

$$f_5 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \end{pmatrix}.$$