Nome candidato:

# I APPELLO DEL CORSO
# MATEMATICA PER INGEGNERIA ELETTRONICA
# 28 GENNAIO 2022

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

**ESERCIZIO 1** (8 punti)
Sia $V_1$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$V_1 = \mathrm{Lin}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

e sia $V_2$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 = 0, \\ X_1 + X_4 = 0, \\ -X_2 + X_3 - X_4 = 0, \\ 2X_1 - X_2 + X_3 + X_4 = 0. \end{cases}$$

(A) Determinare una base di $V_1$ e scrivere $V_1$ in forma cartesiana.
(B) Determinare una base di $V_2$ e calcolare la sua dimensione.
(C) Scrivere $V_1 + V_2$ in forma cartesiana e determinare una sua base.
(D) Calcolare la dimensione di $V_1 \cap V_2$ usando la formula di Grassmann, e determinare una sua base.

**ESERCIZIO 2** (8 punti)
Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ 2x_1 - 2x_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(A) Determinare una base del nucleo $\ker(f)$.
(B) Calcolare la dimensione dell'immagine $\mathrm{Im}(f)$ usando il teorema di rango-nullità.
(C) Mostrare che

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$ e calcolare le matrici di cambiamento di base $M_{\mathcal{D},\mathcal{B}}$ e $M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$, dove $\mathcal{D}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(D) Mostrare che

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^4$ e calcolare le matrici di cambiamento di base $M_{\mathcal{E},\mathcal{C}}$ e $M_{\mathcal{C},\mathcal{E}}$, dove $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(E) Calcolare le matrici $M_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(f)$ e $M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f)$.

**ESERCIZIO 3** (8 punti)

Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x_1 - 2x_3 \\ x_1 - 2x_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(A) Calcolare gli autovalori di $g$ e la moro molteplicità algebrica.

(B) Per ciascun autovalore di $g$, calcolare una base dell'autospazio corrispondente e dire qual'è la sua molteplicità geometrica.

(C) Dire se $g$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base $\mathcal{B}$ diagonalizzante per $g$ e scrivere $M_{\mathcal{B}}(g)$.

(D) Dire se $M(g)$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una matrice invertibile $P \in M_3$ tale che $P \cdot M(g) \cdot P^{-1}$ è diagonale.

**ESERCIZIO 4** (8 punti)

Sia $f \in \text{End}(V)$ un operatore su uno spazio vettoriale $V$ di dimensione finita. Siano $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ gli autovalori di $f$ e siano $\{\text{geo}(\lambda_1), \ldots, \text{geo}(\lambda_r)\}$ le loro molteplicità geometriche.

(A) Dimostrare che

$$\text{geo}(\lambda_1) + \ldots + \text{geo}(\lambda_r) \leq \dim(V).$$

(B) Dimostrare che

$$f \text{ è diagonalizzabile } \Leftrightarrow \text{geo}(\lambda_1) + \ldots + \text{geo}(\lambda_r) = \dim(V).$$

**ESERCIZIO 5** (8 punti)

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa. Se è vera fornire una dimostrazione, se è falsa fornire un controesempio.

(A) Date due matrici $A, B \in M_n$, vale che $\text{rg}(AB) = \text{rg}(A) \cdot \text{rg}(B)$.

(B) La somma di due sottospazi distinti di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 è sempre uguale a $\mathbb{R}^4$.

(C) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operatore lineare il cui polinomio caratteristico è $(x+1)^2(x-1)$. Allora $f$ è suriettivo.

(D) Sia $f \in \text{End}(V)$ un operatore invertibile e diagonalizzabile. Allora l'operatore inverso $f^{-1}$ è diagonalizzabile.