Nome candidato:

II APPELLO DEL CORSO
MATEMATICA PER INGEGNERIA ELETTRONICA
17 FEBBRAIO 2022

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (8 punti)
Sia V_1 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$V_1 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}\right),$$

e sia V_2 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 = 0, \\ X_1 + X_4 = 0, \\ -X_2 + X_3 - X_4 = 0, \\ 2X_1 - X_2 + X_3 + X_4 = 0. \end{cases}$$

(A) Scrivere V_1 in forma cartesiana e determinare una sua base.
(B) Determinare una base di V_2 e calcolare la sua dimensione.
(C) Determinare una base di $V_1 \cap V_2$.
(D) Calcolare la dimensione di $V_1 + V_2$ usando la formula di Grassmann, e determinare una sua base.

ESERCIZIO 2 (8 punti)
Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x_2 - x_3 + x_4\\x_1 + x_3 - x_4\\x_1 + x_2\\x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4\end{pmatrix}.$$

(A) Determinare una base dell'immagine $\mathrm{Im}(f)$.
(B) Calcolare la dimensione del nucleo $\ker(f)$ usando il teorema di rango-nullità e trovare una sua base.
(C) Mostrare che

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}3\\0\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-3\\-2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^4$ e calcolare le matrici di cambiamento di base $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ e $M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$, dove $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.
(D) Calcolare le matrici $M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f)$, $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(f)$ e $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

ESERCIZIO 3 (8 punti)

Si consideri l'applicazione lineare

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(A) Calcolare gli autovalori di g e la moro molteplicità algebrica.
(B) Per ciascun autovalore di g, calcolare una base dell'autospazio corrispondente e dire qual'è la sua molteplicità geometrica.
(C) Dire se g è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base $\mathcal{B}$ diagonalizzante per g e scrivere $M_{\mathcal{B}}(g)$.
(D) Dire se $M(g)$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una matrice invertibile $P \in M_3$ tale che $P \cdot M(g) \cdot P^{-1}$ sia diagonale.

ESERCIZIO 4 (8 punti)
Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{v_1, \dots, v_r\}$ un sistema di vettori di V.
(A) Dimostrare che se $\{v_1, \dots, v_r\}$ è generante, allora $\{v_1, \dots, v_r\}$ contiene una base di V.
(B) Dimostrare che se $\{v_1, \dots, v_r\}$ è generante e V è finitamente generato, allora $\{v_1, \dots, v_r\}$ si può estendere ad una base di V.

ESERCIZIO 5 (8 punti)
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa. Se è vera fornire una dimostrazione, se è falsa fornire un controesempio.
(A) Siano A, B, C tre matrici quadrate dello stesso ordine. Se $AB = AC$, allora $B = C$.
(B) Siano V e W due spazi vettoriali tali che $\dim V = 4$ e $\dim W = 2$. Allora il nucleo di ogni applicazione lineare $f : V \to W$ ha dimensione 2.
(C) Sia $f : V \to V$ un operatore lineare. Allora la somma di due autovettori di f è ancora un autovettore di f.
(D) Sia A una matrice quadrata. Se A è diagonalizzabile allora A^k è diagonalizzabile per ogni $k \geq 1$.