Nome candidato:

III APPELLO DEL CORSO
MATEMATICA PER INGEGNERIA ELETTRONICA
24 GIUGNO 2022

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (8 punti)
Sia V_1 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$V_1 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix}\right),$$

e sia V_2 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - X_3 = 0, \\ X_1 + X_2 + X_4 = 0, \\ -X_2 - X_3 - X_4 = 0, \\ 2X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = 0. \end{cases}$$

(A) Scrivere V_1 in forma cartesiana e determinare una sua base.
(B) Determinare una base di V_2 e calcolare la sua dimensione.
(C) Scrivere $V_1 + V_2$ in forma cartesiana e determinare una sua base.
(D) Calcolare la dimensione di $V_1 \cap V_2$ usando la formula di Grassmann, e determinare una sua base.

ESERCIZIO 2 (8 punti)
Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x_1 + x_2 - x_3\\ -x_1 + x_2 - x_3\\ 2x_2 - 2x_3\\ 2x_1\end{pmatrix}.$$

(A) Determinare una base dell'immagine $\mathrm{Im}(f)$.
(B) Calcolare la dimensione del nucleo $\ker(f)$ usando il teorema di rango-nullità.
(C) Mostrare che

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$ e calcolare le matrici di cambiamento di base $M_{\mathcal{D},\mathcal{B}}$ e $M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$, dove $\mathcal{D}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(D) Mostrare che

$$\mathcal{C} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^4$ e calcolare le matrici di cambiamento di base $M_{\mathcal{E},\mathcal{C}}$ e $M_{\mathcal{C},\mathcal{E}}$, dove $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(E) Calcolare le matrici $M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(f)$ e $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(f)$.

ESERCIZIO 3 (8 punti)
Si consideri l'applicazione lineare

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(A) Calcolare gli autovalori di g e la moro molteplicità algebrica.

(B) Per ciascun autovalore di g, calcolare una base dell'autospazio corrispondente e dire qual'è la sua molteplicità geometrica.

(C) Dire se g è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base $\mathcal{B}$ diagonalizzante per g e scrivere $M_{\mathcal{B}}(g)$.

(D) Dire se $M(g)$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una matrice invertibile $P \in M_3$ tale che $P \cdot M(g) \cdot P^{-1}$ sia diagonale.

ESERCIZIO 4 (8 punti)
Sia $\mathcal{B} := \{b_1, \dots, b_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V e sia $\mathcal{C} := \{c_1, \dots, c_n\}$ un sistema di vettori di uno spazio vettoriale W.

(A) Dimostrare che esiste ed è unica un'applicazione lineare $f : V \to W$ tale che $f(\mathcal{B}) = \mathcal{C}$, cioe' $f(b_i) = c_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$.

(B) Dimostrare che l'applicazione lineare f come in (A) è iniettiva se e solo se $\mathcal{C}$ è linearmente indipendente.

(C) Dimostrare che l'applicazione lineare f come in (A) è suriettiva se e solo se $\mathcal{C}$ è generante.

ESERCIZIO 5 (8 punti)
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa. Se è vera fornire una dimostrazione, se è falsa fornire un controesempio.

(A) Sia $A \in M_n$ una matrice quadrata di ordine n tale che A^k è invertibile per qualche intero $k \geq 1$. Allora A è invertibile.

(B) Esistono due sottospazi di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 la cui intersezione è il sottospazio vettoriale nullo $\{\overline{0}\}$.

(C) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operatore lineare il cui polinomio caratteristico è $(x-1)(x+1)x$. Allora f è suriettivo.

(D) Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ un operatore diagonalizzabile. Allora f è invertibile.