Nome candidato:

IV APPELLO DEL CORSO
MATEMATICA PER INGEGNERIA ELETTRONICA
22 LUGLIO 2022

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (8 punti)
Sia V_1 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$V_1 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-2\end{pmatrix}\right),$$

e sia V_2 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 0, \\ X_3 - X_4 = 0, \\ X_2 + X_3 = 0, \\ X_1 + X_3 - X_4 = 0. \end{cases}$$

(A) Scrivere V_1 in forma cartesiana e determinare una sua base.
(B) Determinare una base di V_2 e calcolare la sua dimensione.
(C) Scrivere $V_1 + V_2$ in forma cartesiana e determinare una sua base.
(D) Calcolare la dimensione di $V_1 \cap V_2$ usando la formula di Grassmann.

ESERCIZIO 2 (8 punti)
Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x_1 + x_3\\x_2 + x_4\\x_1 - x_2 - x_3 + x_4\\2x_1 + 2x_4\end{pmatrix}.$$

(A) Determinare una base del nucleo $\ker(f)$.
(B) Calcolare la dimensione dell'immagine $\mathrm{Im}(f)$ usando il teorema di rango-nullità e trovare una sua equazione cartesiana.
(C) Mostrare che

$$\mathcal{C} = \left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^4$ e calcolare le matrici di cambiamento di base $M_{\mathcal{E},\mathcal{C}}$ e $M_{\mathcal{C},\mathcal{E}}$, dove $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.
(D) Calcolare le matrici $M_{\mathcal{E},\mathcal{C}}(f)$ e $M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f)$.

ESERCIZIO 3 (8 punti)

Si consideri l'applicazione lineare

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 + 3x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

(A) Calcolare gli autovalori di g e la moro molteplicità algebrica.
(B) Per ciascun autovalore di g, calcolare una base dell'autospazio corrispondente e dire qual'è la sua molteplicità geometrica.
(C) Dire se g è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base $\mathcal{B}$ diagonalizzante per g e scrivere $M_{\mathcal{B}}(g)$.
(D) Dire se $M(g)$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una matrice invertibile $P \in M_3$ tale che $P \cdot M(g) \cdot P^{-1}$ sia diagonale.

ESERCIZIO 4 (8 punti)
Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ un operatore su uno spazio vettoriale V di dimensione finita.
(A) Dimostrare che per ogni autovalore λ di f vale che
$$1 \leq \mathrm{geo}(\lambda) \leq \mathrm{alg}(\lambda).$$
(B) Dimostrare che f è diagonalizzabile se e solo se valgono le seguenti due condizioni
 (i) il polinomio caratteristico $P_f(T)$ di f ha solo fattori irriducibili lineari;
 (ii) $\mathrm{geo}(\lambda) = \mathrm{alg}(\lambda)$ per ogni autovalore λ di f.

ESERCIZIO 5 (8 punti)
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa. Se è vera fornire una dimostrazione, se è falsa fornire un controesempio.
(A) Siano A, B, C tre matrici quadrate dello stesso ordine con A invertibile. Se $AB = AC$, allora $B = C$.
(B) Esistono due sottospazi di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 la cui intersezione è il sottospazio nullo.
(C) Sia A una matrice quadrata tale che $A^2 = A$. Allora i possibili autovalori di A sono 0 e 1.
(D) Se $A \in M_n$ è una matrice diagonalizzabile che ha 1 come unico autovalore, allora $A = I_n$.