Nome candidato:

V APPELLO DEL CORSO
MATEMATICA PER INGEGNERIA ELETTRONICA
16 SETTEMBRE 2022

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (8 punti)
Sia V_1 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$V_1 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right),$$

e sia V_2 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} -X_2 + X_3 - X_4 = 0, \\ 2X_1 - X_2 + X_3 + X_4 = 0, \\ X_1 - X_2 + X_3 = 0, \\ X_1 + X_4 = 0. \end{cases}$$

(A) Determinare una base di V_1 e scrivere V_1 in forma cartesiana.
(B) Determinare una base di V_2 e calcolare la sua dimensione.
(C) Scrivere $V_1 + V_2$ in forma cartesiana e determinare una sua base.
(D) Calcolare la dimensione di $V_1 \cap V_2$ usando la formula di Grassmann, e determinare una sua base.

ESERCIZIO 2 (8 punti)
Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x_1 - x_2 + x_3\\ -x_1 + x_2 - x_3\\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3\end{pmatrix}.$$

(A) Determinare una base dell'immagine $\mathrm{Im}(f)$.
(B) Calcolare la dimensione del nucleo $\ker(f)$ usando il teorema di rango-nullità e trovare una sua equazione cartesiana.
(C) Mostrare che

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$ e calcolare le matrici di cambiamento di base $M_{\mathcal{D},\mathcal{B}}$ e $M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$, dove $\mathcal{D}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(D) Calcolare le matrici $M_{\mathcal{D},\mathcal{B}}(f)$ e $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

ESERCIZIO 3 (8 punti)

Si consideri l'applicazione lineare

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_3 \\ -x_1 + 2x_3 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(A) Calcolare gli autovalori di g e la moro molteplicità algebrica.
(B) Per ciascun autovalore di g, calcolare una base dell'autospazio corrispondente e dire qual'è la sua molteplicità geometrica.
(C) Dire se g è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base $\mathcal{B}$ diagonalizzante per g e scrivere $M_{\mathcal{B}}(g)$.
(D) Dire se $M(g)$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una matrice invertibile $P \in M_3$ tale che $P \cdot M(g) \cdot P^{-1}$ sia diagonale.

ESERCIZIO 4 (8 punti)

Siano $\mathcal{E} := \{e_1, \dots, e_n\}$ e $\mathcal{F} := \{f_1, \dots, f_m\}$ due sistemi di vettori in uno spazio vettoriale V di cardinalità uguale a, rispettivamente, $n = |\mathcal{E}|$ e $m = |\mathcal{F}|$.

(A) Dimostrare che se $\mathcal{E}$ è generante e $\mathcal{F}$ è linearmente indipendente, allora $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{E}|$.
(B) Dimostrare che se $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ sono basi di V, allora $|\mathcal{F}| = |\mathcal{E}|$.

ESERCIZIO 5 (8 punti)

Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa. Se è vera fornire una dimostrazione, se è falsa fornire un controesempio.

(A) Sia A una matrice quadrata. Se $A \neq 0$, allora $A^2 \neq 0$.
(B) Siano V e W due spazi vettoriali tali che $\dim V = 4$ e $\dim W = 2$. Allora esiste un'applicazione lineare $f : V \to W$ di nullità 1.
(C) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operatore lineare il cui polinomio caratteristico è $X^3 + X$. Allora f non è iniettivo.
(D) Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ un operatore tale che esiste una base $\mathcal{B}$ di V con la proprietà che $M_{\mathcal{B}}(f)$ è triangolare superiore. Allora f è diagonalizzabile.