Nome candidato:

II APPELLO DI GEOMETRIA
VII APPELLO DI MATEMATICA PER INGEGNERIA ELETTRONICA
14 FEBBRAIO 2023

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (8 punti)
Sia V_1 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$V_1 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right),$$

e sia V_2 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} -X_2 - X_3 - X_4 = 0, \\ X_1 - X_3 = 0, \\ 2X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = 0, \\ X_1 + X_2 + X_4 = 0. \end{cases}$$

(A) Scrivere V_1 in forma cartesiana e determinare una sua base.
(B) Determinare una base di V_2 e calcolare la sua dimensione.
(C) Scrivere $V_1 + V_2$ in forma cartesiana e determinare una sua base.
(D) Calcolare la dimensione di $V_1 \cap V_2$ usando la formula di Grassmann, e determinare una sua base.

ESERCIZIO 2 (8 punti)
Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x_1 + x_2 - x_3 + x_4\\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4\\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4\end{pmatrix}.$$

(A) Determinare una base dell'immagine $\mathrm{Im}(f)$.
(B) Calcolare la dimensione del nucleo $\ker(f)$ usando il teorema di rango-nullità.
(C) Mostrare che

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$ e calcolare le matrici di cambiamento di base $M_{\mathcal{D},\mathcal{B}}$ e $M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$, dove $\mathcal{D}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(D) Mostrare che

$$\mathcal{C} = \left\{\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^4$ e calcolare le matrici di cambiamento di base $M_{\mathcal{E},\mathcal{C}}$ e $M_{\mathcal{C},\mathcal{E}}$, dove $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(E) Calcolare le matrici $M_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(f)$ e $M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(f)$.

ESERCIZIO 3 (8 punti)
Si consideri l'applicazione lineare

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ 2x_2 - x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(A) Calcolare gli autovalori di g e la moro molteplicità algebrica.

(B) Per ciascun autovalore di g, calcolare una base dell'autospazio corrispondente e dire qual'è la sua molteplicità geometrica.

(C) Dire se g è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base $\mathcal{B}$ diagonalizzante per g e scrivere $M_{\mathcal{B}}(g)$.

(D) Dire se esiste una matrice invertibile $P \in M_3$ tale che $P \cdot M(g) \cdot P^{-1}$ sia diagonale, e qualora esista, trovare una tale P.

ESERCIZIO 4 (8 punti)
Sia $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ un sistema di vettori in uno spazio vettoriale V.

(A) Dimostrare che $\mathcal{E}$ è linearmente indipendente se e solo se ogni vettore di $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ si scrive in maniera unica come combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{E}$.

(B) Dimostrare che $\mathcal{E}$ è linearmente dipendente se e solo se esiste un vettore e_i di $\mathcal{E}$ che si scrive come combinazione lineare degli altri vettori $\mathcal{E} \setminus \{e_i\}$ di $\mathcal{E}$.

ESERCIZIO 5 (8 punti)
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa. Se è vera fornire una dimostrazione, se è falsa fornire un controesempio.

(A) Se A è una matrice quadrata tale che $A^2 = 0$, allora $\det A = 0$.

(B) Siano V e W due spazi vettoriali tali che $\dim V = 2$ e $\dim W = 4$. Allora esiste un'applicazione lineare $f : V \to W$ di rango uguale a 3.

(C) Un operatore $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ è invertibile se e solo se 0 non è un autovalore di f.

(D) Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ un operatore tale che esiste una base $\mathcal{B}$ di V con la proprietà che $M_{\mathcal{B}}(f)$ è triangolare superiore con elementi a due a due distinti sulla diagonale. Allora f è diagonalizzabile.