

ESERCIZI SU MATRICI: RANGO, DETERMINANTI E MATRICI INVERTIBILI

ESERCIZIO 1

Calcolare il rango delle seguenti matrici

$$(A) A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(B) A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(C) A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(D) A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(E) A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(F) A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(G) A_7 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(H) A_8 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 2

Per ciascuna delle matrici quadrate nell'Esercizio 1, dire se si tratta di una matrice invertibile e, in caso affermativo, calcolarne l'inversa con il metodo dell'eliminazione di Gauss-Jordan.

ESERCIZIO 3

Per ciascuna delle matrici quadrate nell'Esercizio 1, calcolare il determinante usando l'eliminazione di Gauss-Jordan.

ESERCIZIO 4

Per ciascuna delle matrici quadrate nell'Esercizio 1, calcolare il determinante usando lo sviluppo di Laplace.

ESERCIZIO 5

Per ciascuna delle matrici quadrate nell'Esercizio 1, dire se si tratta di una matrice invertibile e, in caso affermativo, calcolarne l'inversa con il metodo dell'aggiugata.

ESERCIZIO 6

Considerare i seguenti sistemi lineari

$$\begin{aligned} \text{(A)} & \begin{cases} X_1 + 2X_2 = -1 \\ -X_1 + X_2 = 2 \end{cases} \\ \text{(B)} & \begin{cases} X_1 - X_2 - X_3 = -1 \\ -X_1 + X_2 = 2 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 = 1 \end{cases} \\ \text{(C)} & \begin{cases} X_1 - X_2 - X_3 + X_4 = -1 \\ -X_1 + X_2 + X_4 = 2 \\ X_1 - X_2 - 2X_3 = 1, \\ X_1 - X_2 - 3X_3 + 2X_4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Per ciascuno dei sistemi lineari precedenti:

- (i) Verificare che la matrice dei coefficienti del sistema è invertibile.
- (ii) Risolvere il sistema usando l'eliminazione di Gauss.
- (iii) Risolvere il sistema usando la regola di Cramer.