

FOGLIO DI ESERCIZI 6: MATRICI DI CAMBIAMENTO BASE E DI APPLICAZIONI LINEARI

ESERCIZIO 1

(A) Si dimostri che i seguenti sistemi di vettori di \mathbb{R}^2 sono basi

$$\mathcal{B}_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si scrivano le matrici di cambiamento di base $M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$ e $M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}$.

(B) Si dimostri che i seguenti sistemi di vettori di \mathbb{R}^3 sono basi

$$\mathcal{C}_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si scrivano le matrici di cambiamento di base $M_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2}$ e $M_{\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1}$.

(C) Si dimostri che i seguenti sistemi di vettori di \mathbb{R}^4 sono basi

$$\mathcal{D}_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si scrivano le matrici di cambiamento di base $M_{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2}$ e $M_{\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_1}$.

ESERCIZIO 2

Si consideri la seguente applicazione lineare

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

Si scriva la matrice $M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1}(f_1)$ dove \mathcal{B}_1 e' la base ordinata dell'Esercizio 1.

ESERCIZIO 3

Si consideri la seguente applicazione lineare

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Si scriva la matrice $M_{\mathcal{C}_1, \mathcal{B}_1}(f_2)$ dove \mathcal{B}_1 e \mathcal{C}_1 sono le basi ordinate dell'Esercizio 1.

ESERCIZIO 4

Si consideri la seguente applicazione lineare

$$f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \end{pmatrix}$$

Si scriva la matrice $M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1}(f_3)$ dove \mathcal{B}_1 e \mathcal{C}_1 sono le basi ordinate dell'Esercizio 1.

ESERCIZIO 5

Si consideri la seguente applicazione lineare

$$f_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

Si scriva la matrice $M_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_1}(f_4)$ dove \mathcal{C}_1 e' la base ordinata dell'Esercizio 1.

ESERCIZIO 6

Si consideri la seguente applicazione lineare

$$f_5 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_3 \\ -2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

Si scriva la matrice $M_{\mathcal{D}_1, \mathcal{C}_1}(f_5)$ dove \mathcal{C}_1 e \mathcal{D}_1 sono le basi ordinate dell'Esercizio 1.

ESERCIZIO 7

Si consideri la seguente applicazione lineare

$$f_6 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 \end{pmatrix}$$

Si scriva la matrice $M_{\mathcal{C}_1, \mathcal{D}_1}(f_6)$ dove \mathcal{C}_1 e \mathcal{D}_1 sono le basi ordinate dell'Esercizio 1.

ESERCIZIO 8

Si consideri la seguente applicazione lineare

$$f_7 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

Si scriva la matrice $M_{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_1}(f_7)$ dove \mathcal{D}_1 e' la base ordinata dell'Esercizio 1.

ESERCIZIO 9

Si considerino le basi dell'Esercizio 1 e le applicazioni lineari f_i dei precedenti esercizi.

Si calcolino le seguenti matrici:

- (A) $M_{\mathcal{D}_1, \mathcal{B}_1}(f_5 \circ f_2)$.
- (B) $M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{D}_1}(f_3 \circ f_6)$.
- (C) $M_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_1}(f_2 \circ f_3)$.
- (D) $M_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_1}(f_4 \circ f_4)$.
- (E) $M_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_1}(f_6 \circ f_5)$.