Nome candidato:

I APPELLO DI GEOMETRIA
VI APPELLO DI MATEMATICA PER INGEGNERIA ELETTRONICA
24 GENNAIO 2023

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (8 punti)
Sia V_1 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$V_1 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\-2\end{pmatrix}\right),$$

e sia V_2 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_2 - X_3 + X_4 = 0, \\ -X_2 + X_3 - X_4 = 0. \end{cases}$$

(A) Scrivere V_1 in forma cartesiana e determinare una sua base.
(B) Determinare una base di V_2 e calcolare la sua dimensione.
(C) Scrivere $V_1 \cap V_2$ in forma cartesiana e determinare una sua base.
(D) Calcolare la dimensione di $V_1 + V_2$ usando la formula di Grassmann, e determinare una sua base.

ESERCIZIO 2 (8 punti)
Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x_1 + x_2 - x_3\\-x_1 + x_2 - x_3\\2x_2 - 2x_3\end{pmatrix}.$$

(A) Determinare una base del nucleo $\ker(f)$.
(B) Calcolare la dimensione dell'immagine $\mathrm{Im}(f)$ usando il teorema di rango-nullità e trovare una sua equazione cartesiana.
(C) Mostrare che

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$ e calcolare le matrici di cambiamento di base $M_{\mathcal{D},\mathcal{B}}$ e $M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$, dove $\mathcal{D}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(D) Calcolare le matrici $M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(f)$ e $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

ESERCIZIO 3 (8 punti)
Si consideri l'applicazione lineare

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x_1 - 2x_2\\x_1 - 2x_2\\x_1 - x_2 - x_3\end{pmatrix}.$$

(A) Calcolare gli autovalori di g e la moro molteplicità algebrica.
(B) Per ciascun autovalore di g, calcolare una base dell'autospazio corrispondente e dire qual'è la sua molteplicità geometrica.
(C) Dire se g è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base $\mathcal{B}$ diagonalizzante per g e scrivere $M_{\mathcal{B}}(g)$.
(D) Dire se esiste una matrice invertibile $P \in M_3$ tale che $P \cdot M(g) \cdot P^{-1}$ sia diagonale e, in caso affermativo, trovare una tale matrice P.

ESERCIZIO 4 (8 punti)
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Siano W, W_1 e W_2 tre sottospazi vettoriali di V.
(A) Dimostrare che W è finitamente generato e che $\dim W \leq \dim V$.
(B) Dimostrare che
$$\dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V.$$
(C) Dimostrare che
$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2).$$

ESERCIZIO 5 (8 punti)
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa. Se è vera fornire una dimostrazione, se è falsa fornire un controesempio.
(A) Una matrice quadrata che abbia due righe una multipla dell'altra non è mai invertibile.
(B) La somma di due sottospazi distinti di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 è uguale a $\mathbb{R}^3$.
(C) Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ un operatore invertibile. Allora uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di f se e solo se λ^{-1} è un autovalore di f^{-1}.
(D) Ogni matrice $A \in M_n$ diagonalizzabile è invertibile.