Nome candidato:

III APPELLO DI GEOMETRIA / MATEMATICA PER INGEGNERIA ELETTRONICA 23 GIUGNO 2023

Tutte le risposte vanno argomentate chiaramente.

ESERCIZIO 1 (8 punti)
Sia V_1 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$V_1 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\\1\end{pmatrix}\right),$$

e sia V_2 il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 = 0, \\ X_1 + X_4 = 0, \\ 2X_1 - X_2 + X_3 + X_4 = 0, \\ -X_2 + X_3 - X_4 = 0. \end{cases}$$

(A) Scrivere V_1 in forma cartesiana e determinare una sua base.
(B) Determinare una base di V_2 e calcolare la sua dimensione.
(C) Determinare una base di $V_1 \cap V_2$.
(D) Calcolare la dimensione di $V_1 + V_2$ usando la formula di Grassmann, e determinare una sua base.

ESERCIZIO 2 (8 punti)
Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x_1 + x_2 - x_3\\-x_1 + x_2 - x_3\\2x_2 - 2x_3\\2x_1\end{pmatrix}.$$

(A) Determinare una base dell'immagine $\mathrm{Im}(f)$.
(B) Calcolare la dimensione del nucleo $\ker(f)$ usando il teorema di rango-nullità.
(C) Mostrare che

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^3$ e calcolare le matrici di cambiamento di base $M_{\mathcal{D},\mathcal{B}}$ e $M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$, dove $\mathcal{D}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(D) Mostrare che

$$\mathcal{C} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^4$ e calcolare le matrici di cambiamento di base $M_{\mathcal{E},\mathcal{C}}$ e $M_{\mathcal{C},\mathcal{E}}$, dove $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(E) Calcolare le matrici $M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(f)$ e $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(f)$.

ESERCIZIO 3 (8 punti)
Si consideri l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x_1 - 2x_3 \\ x_1 - 2x_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(A) Calcolare gli autovalori di g e la moro molteplicità algebrica.
(B) Per ciascun autovalore di g, calcolare una base dell'autospazio corrispondente e dire qual'è la sua molteplicità geometrica.
(C) Dire se g è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare una base $\mathcal{B}$ diagonalizzante per g e scrivere $M_{\mathcal{B}}(g)$.

ESERCIZIO 4 (8 punti)
Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ un operatore su uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Siano $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ gli autovalori di f e siano $\{\mathrm{geo}(\lambda_1), \ldots, \mathrm{geo}(\lambda_r)\}$ le loro molteplicità geometriche.

(A) Dimostrare che

$$\mathrm{geo}(\lambda_1) + \ldots + \mathrm{geo}(\lambda_r) \leq \dim(V).$$

(B) Dimostrare che

$$f \text{ è diagonalizzabile } \Leftrightarrow \mathrm{geo}(\lambda_1) + \ldots + \mathrm{geo}(\lambda_r) = \dim(V).$$

ESERCIZIO 5 (8 punti)
Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa. Se è vera fornire una dimostrazione, se è falsa fornire un controesempio.

(A) Sia $A \in M_{n\times n}$ la matrice dei coefficienti di un sistema lineare Σ. Se A non è invertibile, allora Σ non ha soluzioni.
(B) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5 e W uno spazio vettoriale di dimensione 3. Allora esiste un'applicazione lineare $f : V \to W$ il cui nucleo ha dimensione 1.
(C) Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ un operatore invertibile. Allora f è diagonalizzabile.
(D) Date due matrici $A, B \in M_n$, vale che $\det(A \cdot B) = \det(A) + \det(B)$.