Esercitazione 1, GE210
Geometria e Algebra Lineare II

Esercitatore: Luca Schaffler

26/09/2023

Problema 1. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ su campo base $\mathbb{R}$. Dato un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, siano (x_1, x_2, x_3) le coordinate di $\mathbf{x}$ rispetto ad una base fissata $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Stabilire quali delle seguenti applicazioni $f\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sono forme bilineari.

1. $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 3x_2y_3 - x_1y_2$;
2. $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -x_1y_2 + x_2x_3 - 5x_1y_2$;
3. $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3)(-y_1 - 2y_2 + 3y_3)$;
4. $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + |x_2|y_2 + x_3y_3$;
5. $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{1\leq i,j\leq 2} x_iy_j\right) + x_3 + y_3$;
6. $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 - 7x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_2 + 7x_3y_1$.

Problema 2. Per le forme bilineari del Problema 1, determinare la matrice associata, stabilire se sono simmetriche o antisimmetriche, e calcolarne il rango.

Problema 3. Si consideri la forma bilineare su $\mathbb{R}^2$ data da

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}x_1y_1 + \frac{3}{2}x_1y_2 - \frac{1}{2}x_2y_1 + x_2y_2$$

rispetto alla base canonica $\mathbf{e} = \{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\}$.

1. Rappresentare la forma bilineare b rispetto alla base $\mathbf{f} = \{\left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\-1\end{smallmatrix}\right)\}$.

2. Rispetto alla base $\mathbf{g} = \{\left(\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}4\\1\end{smallmatrix}\right)\}$ le forme bilineari α, β sono date da

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= s_1t_1 - s_1t_2 + 10s_2t_1 - 3s_2t_2,\\ \beta(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= 4s_1t_1 - 2s_1t_2 + 14s_2t_1 + 13s_2t_2.\end{aligned}$$

La forma bilineare b coincide con α o β?

3. Scrivere la forma bilineare α nella base canonica $\mathbf{e}$.