Esercitazione 3, GE210
Geometria e Algebra Lineare II

Esercitatore: Luca Schaffler

10/10/2023

Problema 1. Si consideri la forma quadratica $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ che rispetto alla base canonica è data da

$$q(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - 4x_1x_2 + 10x_2^2 + 12x_2x_3 + 3x_3^2.$$

(a) Determinare la forma bilineare polare, la matrice associata, e il rango di q.

(b) Determinare una base diagonalizzante per q.

(c) Trovare la segnatura di q e determinare se q è definita (semidefinita) positiva o negativa.

(d) Calcolare la forma canonica di Sylvester.

(e) Determinare una base per cui q è in forma canonica di Sylvester.

Problema 2. Ripetere il Problema 1 per la seguente altra forma quadratica, sempre rispetto alla base canonica.

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5x_1x_2 + 3x_1x_3.$$

Problema 3. Trovare una base che metta in forma canonica la forma quadratica $q\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ data rispetto alla base canonica da $q(z_1, z_2) = 2z_1^2 - 3z_1z_2 + \frac{1}{2}z_2^2$.

Problema 4. Senza diagonalizzarle, dire se le seguenti matrici simmetriche sono definite positive o definite negative:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 7 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Per risolvere il precedente esercizio, potete usare il seguente risultato.

Teorema.

1. *Una matrice simmetrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ è definita positiva se e solo se tutti i suoi minori principali $D_1, D_2, \ldots, D_n$ soddisfano le seguenti condizioni*

$$D_1 > 0,\ D_2 > 0,\ D_3 > 0,\ \ldots$$

2. *Una matrice simmetrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ è definita negativa se e solo se i suoi minori principali $D_1, D_2, \ldots, D_n$ soddisfano le seguenti condizioni*

$$D_1 < 0,\ D_2 > 0,\ D_3 < 0,\ \ldots$$

Commenti.

(i) Se state studiando una matrice simmetrica A che non soddisfa nessuno dei due criteri, allora la conclusione è che A non è definita positiva e non è definita negativa. Quindi, A può essere semidefinita positiva, semidefinita negativa, indefinita, oppure nulla. Per determinare in quale caso siamo, la matrice deve essere studiata di più con altri metodi.

(ii) Se ottente che $D_1 > 0,\ D_2 < 0,\ D_3 > 0,\ \ldots$, allora la conclusione è come in (i).

(iii) Se ottente che $D_i = 0$ per qualche $i \in \{1, \ldots, n\}$, allora la conclusione è come in (i).

Esempio. La matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ soddisfa $D_1 = 1 > 0, D_2 = -1 < 0$, e come si vede A è indefinita.