

Esercitazione 8, GE210

Geometria e Algebra Lineare II

Esercitatore: Luca Schaffler

21/11/2023

Problema 1. Sia $\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ una base ortonormale di uno spazio vettoriale reale V rispetto a un dato prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su V . Sia $T: V \rightarrow V$ l'operatore lineare che nella base \mathbf{f} è dato da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) T è un operatore simmetrico? Sì, no, spiegare.
- (b) Determinare una matrice ortogonale che diagonalizza T .

Problema 2. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 2 e sia $\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ una sua base. Sia $q: V \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica che nella base \mathbf{f} è data da

$$q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2.$$

- (a) Dimostrare che q definisce un prodotto scalare su V .
- (b) Sia T l'operatore lineare che nella base \mathbf{f} è dato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

L'operatore T è un operatore simmetrico? Sì, no, spiegare.

- (c) Trovare una base ortonormale rispetto alla quale la matrice di T è in forma diagonale.

Problema 3. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione 3. Sia $\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ una base di V . Rispetto alla base \mathbf{f} , siano $h_1, h_2, h_3: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ date da

- $h_1(x, y) = ix_1\bar{y}_1 + 6x_1\bar{y}_3 + 6\bar{x}_3y_1 + (1+i)x_2\bar{y}_3 + (1-i)x_3\bar{y}_2.$
- $h_2(x, y) = ix_1\bar{y}_1 + 6x_1\bar{y}_3 + 6x_3\bar{y}_1 + (1+i)x_2\bar{y}_3 + (1-i)x_3\bar{y}_2.$

- $h_3(x, y) = 2ix_1\bar{y}_2 - 2ix_2\bar{y}_1 + (\sqrt{2} + i)x_2\bar{y}_3 + (\sqrt{2} - i)x_3\bar{y}_2 + 4x_3\bar{y}_3.$

Quali tra queste sono forme hermitiane su V ?

Problema 4. Si consideri la matrice hermitiana

$$H = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 1 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

(Questa induce una forma hermitiana $h: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ rispetto alla base canonica.) Trovare una base che diagonalizza H .