Esercitazione 10, GE210
Geometria e Algebra Lineare II

Esercitatore: Luca Schaffler

12/12/2023

Problema 1. Ricordiamo: sia $T(X,Y) = (X', Y')$ un'affinità e sia $\mathscr{C}$ in $\mathbb{A}^2$ una curva di equazione $f(X,Y) = 0$. La curva $\mathscr{D}$ di equazione $g(X,Y) = f(T(X,Y)) = 0$ si chiama la *trasformata di* $\mathscr{C}$ *tramite* T^{-1}. Si ha che $\mathscr{D} = T^{-1}(\mathscr{C})$, o equivalentemente $T(\mathscr{D}) = \mathscr{C}$.

Determinare $\mathscr{D}$ nei seguenti casi:

(a) $f(X,Y) = 4X - 2Y + 3$, $T(X,Y) = (2X + 3Y - 1, X - Y + 1)$.

(b) $f(X,Y) = X^2 - Y^2 - 2$, $T(X,Y) = (2X - 1, 2X + Y)$.

(c) $f(X,Y) = X^3 + Y^2 - XY$, $T(X,Y) = (X + 1, Y - 1)$.

Definizione. (Sernesi, pagina 361) Sia $\mathscr{C}$ in $\mathbb{A}^2$ la curva data dall'equazione $f(X,Y) = 0$. La *chiusura proiettiva di* $\mathscr{C}$ è la curva $\overline{\mathscr{C}}$ in $\mathbb{P}^2$ data dall'equazione $F(X_0, X_1, X_2) = 0$, dove F è il polinomio omogeneizzato di f. I *punti impropri di* $\mathscr{C}$ sono i punti di $\overline{\mathscr{C}}$ che giacciono sulla retta impropria $X_0 = 0$.

Problema 2. Si consideri la seguente conica in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$:

$$\mathscr{C}\colon\ -3X^2 + 4XY - 2Y - 1 = 0.$$

(a) Determinare la chiusura proiettiva $\overline{\mathscr{C}}$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ di $\mathscr{C}$.

(b) Calcolare i punti impropri di $\mathscr{C}$.

(c) Classificare la conica $\overline{\mathscr{C}}$ e scriverla in forma canonica.

(d) Trovare una proiettività $T \in \mathrm{PGL}(3)$ tale che $T^{-1}(\overline{\mathscr{C}})$ sia in forma canonica.

(e) Come cambiano le risposte sopra se lavorassimo su $\mathbb{C}$ invece di $\mathbb{R}$?

Problema 3. Si considerino le seguenti coniche proiettive reali

$$\mathscr{C}\colon 2X_0X_1 + 6X_1X_2 = 0,\ \ \mathscr{D}_k\colon X_1^2 - X_2^2 + kX_0X_2 - 2X_1X_2 = 0.$$

Per quali valori di k abbiamo che $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}_k$ sono proiettivamente equivalenti?

Problema 4. Si considerino le seguente coniche affini reali:

$$\mathscr{C}_k\colon 3X^2 - 4XY + 2Y + k = 0.$$

Al variare di k, determinare se $\mathscr{C}_k$ è non-degenere o (semplicemente, doppiamente) degenere.