# Preparazione Esonero 1, GE210
# Geometria e Algebra Lineare II

Esercitatore: Luca Schaffler

06/11/2023

**Problema 1.** Sia $\mathbf{f} = \{f_1, f_2, f_3\}$ una base di $\mathbb{C}^3$.

(a) Mostrare che esiste un'unica forma bilineare simmetrica $b\colon \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ tale che

- $b(f_1, f_1) = b(e_2, e_2) = b(e_3, e_3) = -2$;
- $b(f_1, f_1 + 2f_2) = 0$;
- $b(f_1 + f_3, f_2 + f_3) = 0$;
- $b(f_1, f_3) = 0$.

(b) Trovare una base per la quale $b$ è in forma canonica.

**Problema 2.** Consideriamo il prodotto scalare standard su $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dato da

$$\langle \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'.$$

Data una matrice $B \in V$, definiamo la mappa lineare

$$\begin{aligned} f_B\colon V &\to V \\ M &\mapsto BM. \end{aligned}$$

Descrivere le matrici $B$ tali che $f_B$ è un operatore unitario.

**Problema 3.** In $\mathbf{E}^3$, calcolare la distanza tra le due rette

$$r\colon \begin{cases} X = 2t \\ Y = 1 - t \\ Z = 3 + t, \end{cases} \quad r_1\colon \begin{cases} X = 1 - 2s \\ Y = s \\ Z = -1 - s. \end{cases}$$

**Problema 4.** Considerare la forma quadratica definita positiva $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data da

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Ortonormalizzare

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}.$$