Preparazione Esonero 2, GE210
Geometria e Algebra Lineare II

Esercitatore: Luca Schaffler

21/12/2023

Problema 1. Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3 e sia $\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ una sua base ortonormale. Si consideri l'operatore lineare $T\colon V \to V$ simmetrico dato nella base $\mathbf{f}$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Trovare una base ortonormale che diagonalizza T.

Problema 2. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione 3 e sia $\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ una sua base. Sia $h\colon V \times V \to \mathbb{C}$ la forma hermitiana standard nella base $\mathbf{f}$:

$$h(x, y) = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + x_3\overline{y}_3.$$

Si consideri l'operatore lineare $T\colon V \to V$ dato nella base $\mathbf{f}$ da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2i \\ 0 & 1 & i \\ 2i & -i & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) T è un operatore hermitiano?

(b) T è un operatore unitario?

(c) Trovare una base ortonormale che diagonalizza T.

Problema 3. Considerare i seguenti punti in $\mathbb{P}^1$:

$$P_1 := [1, -1],\ P_2 := [0, 1],\ P_3 := [1, 2],\ P_4 := [1, 1],$$

$$Q_1 := [1, -1],\ Q_2 := [1, 0],\ Q_3 := [0, 1],\ Q_4 := [2, 3].$$

(a) Mostrare che $P_1, \dots, P_4$ sono in posizione generale, e che lo stesso vale per $Q_1, \dots, Q_4$.

(b) Trovare la proiettività T che manda P_1, P_2, P_3 in $[1,0], [0,1], [1,1]$.

(c) Esiste una proiettività $S\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tale che $S(P_1) = Q_1, \dots, S(P_4) = Q_4$?

Problema 4. In $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ si considerino le curve

$$\mathscr{C}\colon X^2Y^2 + X^2 + Y^2 + X^4 = 0, \ r\colon X - 7Y + 5 = 0.$$

$\mathscr{C}$ e r si incontrano all'infinito?

Problema 5. (Non svolto in classe, vedi note su Teams.) Si consideri la conica in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ data da

$$\mathscr{C}\colon X^2 - 3Y^2 + XY + 5X = 0.$$

(a) Considerando $\mathscr{C}$ come conica affine, trovare la sua forma canonica.

(b) Trovare un'affinità T tale che $T^{-1}(\mathscr{C})$ sia in forma canonica.

(c) Considerando $\mathscr{C}$ come conica euclidea, trovare la sua forma canonica.

(b) Trovare un'isometria G tale che $G^{-1}(\mathscr{C})$ sia in forma canonica.

(d) Calcolare i punti impropri di $\mathscr{C}$.

(e) Trovare la forma canonica di $\overline{\mathscr{C}}$, la chiusura proiettiva di $\mathscr{C}$.